

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 530.12; 531.18; 537.8

**ТРАЕКТОРИИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ТЕЛ,
ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАССТОЯНИЯ И СКОРОСТИ**

© И.И. Смульский

Институт криосферы Земли СО РАН, г.Тюмень

Рассмотрено взаимодействие между двумя телами, которое зависит от расстояния и скорости между ними. Исследован возможный спектр траекторий. При малых скоростях траектории переходят в классические, при больших – в релятивистские.

**THE TRAJECTORIES AT
INTERACTION OF TWO BODIES DEPENDING FROM VELOCITY**

J.J. Smulsky

В последнее время разными исследователями предлагаются выражения для сил взаимодействия, которые, в отличие от законов Кулона и всемирного тяготения Ньютона, зависят не только от расстояния, но и от скорости и ускорения [1,2]. Зависимость силы F от ускорения, на наш взгляд, является недостатком. Такая сила выражена не в явном виде, так как согласно второму закону Ньютона $F = mW$, где m – масса, слагаемые с ускорением W должны быть в правой части этого равенства, а не в левой. В результате наших исследований [3] было показано, что сила воздействия одного точечного заряда q_1 на другой заряд q_2 , движущийся с относительной скоростью $\beta = v/c_1$, где $c_1 = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, определяется соотношением

$$F = \frac{q_1 q_2 (1 - \beta^2) r}{\epsilon \{r^2 - [\vec{\beta} \times r]^2\}^{3/2}}, \quad (1)$$

где c – скорость света в вакууме, а ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой находятся заряженные объекты. Следует отметить, что, независимо к аналогичному выводу пришли и другие исследователи [4].

При малой скорости заряда v сила (1) совпадает с законом Кулона, а с увеличением скорости сила уменьшается и с приближением к скорости распространения электромагнитного воздействия ($\beta \rightarrow 1$) стремится к нулю, т.е. на

такое тело воздействие не оказывается, и оно не ускоряется. Таким образом, в этих двух предельных случаях соотношение (1) имеет экспериментальное подтверждение. В соответствии с (1) и вторым законом Ньютона ускорение одного точечного тела с зарядом q_1 и массой m_1 относительно другого с зарядом q_2 и массой m_2 запишется так

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mu_1 \frac{\mathbf{r} (1 - \beta^2)}{\{r^2 - [\mathbf{r} \times \vec{\beta}]^2\}^{3/2}}; \quad (2)$$

$$\mu_1 = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{\epsilon m_1 m_2}, \quad (3)$$

где μ_1 — константа взаимодействия. В результате решения уравнения (2) мы получили [5] уравнение траектории в полярной системе координат в виде

$$\varphi = \int \frac{h \, dr}{r^2 v_r}; \quad (4)$$

$$v_r = c_1 \sqrt{1 - \frac{h^2}{c_1^2 r^2} - \left[1 - \frac{v_{r0}^2}{c_1^2} - \frac{h^2}{c_1^2 r_0^2}\right] \exp \left[\frac{2\mu_1}{c_1^2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{c_1^2}}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - \frac{h^2}{c_1^2}}} \right] \right]}, \quad (5)$$

где v_r — радиальная скорость; v_{t0} , v_{r0} — трансверсальная и радиальная скорости на радиусе r_0 ; $h = v_{t0} \cdot r_0 = v_t \cdot r = \text{const}$ — кинематический момент количества движения, остающийся неизменным для всех точек траектории.

Выражения (1) — (5) являются описанием воздействий, распространяющихся с конечной скоростью c_1 . Если считать, что гравитационное воздействие, как это принято в общей теории относительности (ОТО), распространяется с конечной скоростью c_1 , то эти выражения будут описывать и тяготение. При этом константа взаимодействия

$$\mu_1 = -G(m_1 + m_2). \quad (6)$$

Уравнения тяготения в ОТО решены приближенно, путем разложения в ряд и учета слагаемых не выше c^2 . Если с такой же точностью разложим в ряд по c_1^2 выражение (5) и подставим его в (4), то получим уравнение движения в центрально-симметричном поле в ОТО [6]

$$\varphi = \int \frac{h \, dr}{r^2 \sqrt{c_1^2 + v_0^2 - \left[c_1^2 + \frac{h^2}{r^2} \right] \left[1 - \frac{r_g}{r} \right]}}, \quad (7)$$

где $r_g = -2\mu_1/c_1^2$ называют гравитационным радиусом.

Теперь рассмотрим другой крайний случай малых скоростей. Сначала преобразуем выражения (4) — (5) к относительному виду

$$\varphi = \int \frac{d\bar{r}}{r^2 \cdot v_r}; \quad (8)$$

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\beta_p} \sqrt{1 - \frac{\beta_p^2}{\bar{r}^2} - (1 - \beta_p^2) \exp \left[2\alpha_1 \beta_p^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - \beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} \right] \right]}, \quad (9)$$

где $\bar{r} = r/r_p$ — относительный радиус;

r_p — радиус до ближайшей точки траектории (перигентрий), в которой $v_{r0} = 0$;

$\bar{v}_r = v_r/v_p$ — относительная радиальная скорость;

v_p — скорость в перигентрии;

$\beta_p = v_p/c_1$;

$\alpha_1 = \mu_1/(r_p v_p^2)$ — параметр траектории.

В работе [5] показано, что при $c_1 \rightarrow \infty$ выражение (5) переходит в классическое

$$v_r = \sqrt{v_{r0}^2 + \left[\frac{\mu_1}{h} + \frac{h}{r_0} \right]^2 - \left[\frac{\mu_1}{h} + \frac{h}{r} \right]^2}. \quad (10)$$

После отнесения v_r к параметрам в перигентрии относительная радиальная скорость будет равна

$$\bar{v}_r = \sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - \left[\alpha_1 + \frac{1}{\bar{r}} \right]^2},$$

а после интегрирования (8) при граничном условии $\varphi = 0$, $\bar{r} = 1$ получаем уравнение фундаментальных классических траекторий:

$$\bar{r} = \frac{1}{(\alpha_1 + 1) \cos \varphi - \alpha_1}. \quad (11)$$

Вид траекторий определяется величиной параметра α_1 : при $\alpha_1 = -1$ — окружность; при $-1 < \alpha_1 < -0.5$ — эллипс; при $\alpha_1 = -0.5$ — парабола; при $-0.5 < \alpha_1 < 0$ — гипербола; при $\alpha_1 = 0$ — прямая. Таким образом, выражения (4) — (5) или (8) — (9) представляют общие фундаментальные траектории. Эти выражения справедливы и при малых скоростях движения и при больших, стремящихся к скорости света. Эти траектории, в отличие от классических (11), являются двухпараметрическими, так как зависят не только от параметра α_1 , но и от относительной скорости β_p . Поэтому они представляют как физический, так и математический интерес.

Интегрирование уравнения (8) выполнялось численно на ПК типа РС-АТ с помощью пакета MATHCAD. С целью увеличения скорости и точности интегрирования область изменения \bar{r} разделялась на участки, и интегрирование осуществлялось на этих участках, а результаты затем суммировались. С помощью асимптотических решений, приведенных в Приложении, и тестовых примеров установлено, что погрешность интегрирования не превышает 0.001. При расчетах варьировались параметры α_1 (−0.1; −0.2; −0.3; −0.4; −0.5; −0.6; −0.7; −0.8; −0.9) и β_p (0.1; 0.3; 0.7; 0.9). Задавались и другие значения параметров, которые определялись особенностями траекторий. Программы для обработки результатов писались на Фортране. Ниже приведены только наиболее характерные виды траекторий.

На рис.1 в декартовой системе координат ($\bar{x}=x/r_p$; $\bar{y}=y/r_p$) представлены полуветви гиперболовидных траекторий. Притягивающий центр находится в начале координат, а частица движется с перигелия ($\bar{x}=1$; $\bar{y}=0$) в бесконечность или наоборот. Обратимость движения допускается процессом интегрирования для всех траекторий, за исключением 7.

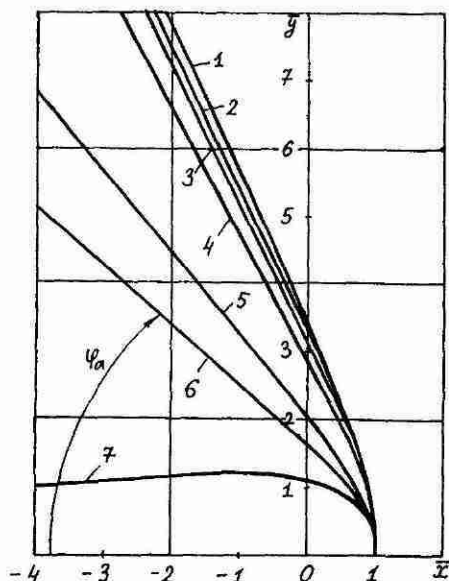


Рис.1. Траектории при $\alpha_1=-0.3$ и при досветовой скорости в перигелии ($\beta_p \leq \beta_{p0}$) с полууглами между асимптотами φ_a и скоростями в бесконечности $\beta_{r\infty}$ (знак! свидетельствует о начале интегрирования с $\bar{r}=1.001$).

№	1	2	3	4	5	6	7
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.93	0.954
α	-0.006	-0.054	-0.15	-0.294	-0.486	-0.519	-0.546
$\beta_{r\infty}$	0.063	0.208	0.329	0.480	0.649	0.668	0.667
φ_a	64.8	64.4	63.8	61.9	50.6	40.3	-5.58!

При $\beta_p=0.1$ траектория практически совпадает с классической. С увеличением скорости в перигелии полуугол между асимптотами φ_a уменьшается, и при предельном $\beta_p=\beta_{pc}=0.954$ для $\alpha_1=-0.3$ угол между асимптотами становится отрицательным. Траектория 7 отличается от остальных не только углом $\varphi_a < 0$. Для пояснения этого рассмотрим некоторые детали интегрирования. Точка $\bar{r}=1$ является особой точкой интеграла (8), так как в ней \bar{v}_r превращается в нуль. Поэтому численное интегрирование осуществлялось от $\bar{r}=1.001$ до $\bar{r}=1000$, а приращение угла φ в области $1 < \bar{r} < 1.001$ определялось из асимптотического решения

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1} / \sqrt{1-\beta_p^2}} \cdot \frac{\sqrt{\bar{r}^2-1}}{\bar{r}}, \quad (12)$$

вывод которого дан в приложении 1. Как видим, знаменатель в первом сомножителе обращается в нуль при

$$\beta_p = \beta_{pc} = \sqrt{1-\alpha_1^2}, \quad (13)$$

Т.е. в данном случае для $\alpha_1 = -0.3$ при $\beta_p = \beta_{pc} = 0.954$ с приближением к $\bar{r} = 1$ угол φ стремится к бесконечности. Этот результат был проверен и численным интегрированием, а именно, последовательным заданием начала интегрирования в $\bar{r} = 1.0001$; $\bar{r} = 1.00001$ и т.д. Таким образом, частица на траектории с предельной скоростью β_{pc} в перигелии, двигаясь из бесконечности, достигает окружности радиусом $\bar{r} = 1$ и сделает на ней бесконечное число оборотов. Т.е. происходит захват движущейся из бесконечности частицы притягивающим центром на круговую орбиту.

Рассмотрим этот процесс более детально. Стремление φ к бесконечности, а, следовательно, и круговая орбита возможны при $\bar{v}_r = 0$ в выражении (8). Тогда из выражения (9) с учетом этого условия получаем

$$\alpha_1 = 0.5 \cdot \frac{\ln \left[\left[1 - \frac{\beta_p^2}{\bar{r}^2} \right] / [1 - \beta_p^2] \right]}{\beta_p^2 / \sqrt{\bar{r}^2 - \beta_p^2} - \beta_p^2 / \sqrt{1 - \beta_p^2}}. \quad (14)$$

Радиус круговой орбиты одновременно является радиусом перигелия, т.е. $\bar{r} = 1$. После нахождения предела правой части (14) при $\bar{r} \rightarrow 1$ в обозначениях $\alpha_{1c} = \alpha_1$ и $\beta_{pc} = \beta_p$ получаем для круговой орбиты

$$\alpha_{1c} = -\sqrt{1 - \beta_{pc}^2}. \quad (15)$$

При малых скоростях ($\beta_p \rightarrow 0$) из (15) следует $\alpha_{1c} = -1$, что действительно соответствует круговой орбите. Так как выражения (13) и (15) идентичны, то это еще раз убеждает в том, что при достижении в перигелии предельной скорости β_{pc} траектория 7 на рис.1 превращается в круговую орбиту.

Под рис.1 приведены также радиальные скорости частиц на бесконечности $\beta_{r\infty}$ и полууглы φ_a между асимптотами. Для траектории 7 начало отсчета полярного угла взято при $\bar{r} = 1.001$. С увеличением скорости частицы на бесконечности возрастает и ее скорость в перигелии. Отступление от этого правила для траекторий 6 и 7 объясняется тем, что параметр траектории α_1 зависит от скорости в перигелии v_p . Поэтому целесообразно рассматривать независимый от скорости параметр взаимодействия

$$\alpha = \frac{2\mu_1}{r_p c^2} = -\frac{r_g}{r_p}, \quad (16)$$

который связан с α_1 соотношением

$$\alpha = 2\alpha_1\beta_p^2. \quad (17)$$

Как видно из рис.1, модуль параметра взаимодействия α для всех гиперболических траекторий меньше 1, т.е. в соответствии с (16) радиус перигелия больше гравитационного.

Третьим свойством траектории 7 на рис.1 является ее предельность. В области $\beta_{pc} < \beta_p < 1$ подкоренное выражение в (9) отрицательно, т.е. траекторий не существует. С целью численного исследования возможных других траекторий параметры уравнений (4) – (5) были отнесены к параметрам $v_{\tau 0}$, r_0 в произвольной точке траектории. В этом случае уравнение (8) остается без изменения, а вместо (9) получаем

$$\bar{v}_r^2 = \frac{1}{\beta_{\tau 0}} \sqrt{1 - \frac{\beta_{\tau 0}^2}{\bar{r}^2} - (1 - \beta_{r_0}^2 - \beta_{\tau 0}^2) \exp \left[2\alpha_1^q \beta_{\tau 0}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - \beta_{\tau 0}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\tau 0}^2}} \right] \right]}, \quad (18)$$

где $\bar{r} = r/r_0$; $\beta_{\tau 0} = v_{\tau}/c_1$; $\beta_{r_0} = v_r/c_1$; $\bar{v}_r^2 = v_r/v_{\tau 0}$; $\alpha_1^q = \mu_1/(r_0 v_{\tau 0}^2)$. Уравнения (8), (18) интегрировались на двух участках $\bar{r} > 1$ и $\bar{r} < 1$. Задавались значения относительной трансверсальной скорости $\beta_{\tau 0} > \beta_{pc}$ и варьировалась радиальная скорость β_{r_0} (см. рис.2). Во всех этих расчетах было получено, что при уменьшении \bar{r} до некоторого его значения $\bar{r} \rightarrow \beta_{\tau 0}$ радиальная скорость стремится к нулю, т.е. эта точка является перигелием $\bar{r} = \bar{r}_p$. А величина $r_p/r_0 = \beta_{\tau 0}$ в соответствии с законом сохранения кинетического момента $\bar{h} = \bar{r}\beta_{\tau 0} = 1$ свидетельствует, что трансверсальная скорость в этой точке стремится к световой, но ее не достигает, то есть $\beta_p = v_p/c_1 = 1_{-0}$. Эти траектории при почти световой скорости в перигелии перенормированы к r_p и представлены на рис.2. Так как параметр траектории $\alpha_1 = \mu_1/(h \cdot v_p)$ связан с $\alpha_1^q = \mu_1/(h \cdot v_{\tau 0})$ соотношением

$$\alpha_1 = \alpha_1^q \beta_{\tau 0}, \quad (19)$$

то в данном случае $\alpha_1 \approx -0.3$ и траектории рис.2 можно рассматривать как продолжение траекторий рис.1 при дальнейшем увеличении скорости частицы на бесконечности. Однако, в отличие от траекторий рис.1, с увеличением β_p (см. траектории 6, 5, 4, 3, 2) угол между асимптотами φ_a увеличивается и при световой скорости частицы ($\beta_{r\infty} = 1$) равен $\pi/2$ (см. траекторию с номером 1). Т.е. частица со световой скоростью движется по прямой линии. Численные решения показали, что траектории со световой скоростью в перигелии получаются при трансверсальной скорости частицы

$$\beta_{\tau 0} > \beta_{pc}. \quad (20)$$

Однако с дальнейшим увеличением трансверсальной скорости (см. траекторию 7 на рис.2) орбита становится конечной с апоцентром, отстоящим от перигелия на угол $\varphi_a = 41.2^\circ$. В этом случае период возврата к перигелию будет осуществляться на угле 82.4° , а за один оборот будет более четырех таких периодов. Так как радиус апоцентра $\bar{r}_a = 1.04$ мало отличается от радиуса

перигелия, то движение будет проходить по почти круговой орбите с четырьмя небольшими "подскоками" на один оборот. Во время "подскоков" скорость частицы замедляется, а в перигелии стремится к скорости света. Так как в данном случае φ_a не кратно π/n , где n целое число, то положение в пространстве перигелиев будет изменяться, они будут поворачиваться за один оборот на угол

$$\Delta\varphi_p = 2\varphi_a(n+1) - 2\pi, \quad (21)$$

где $n = \text{INTEGER}(\pi/\varphi_a)$ — целое число.

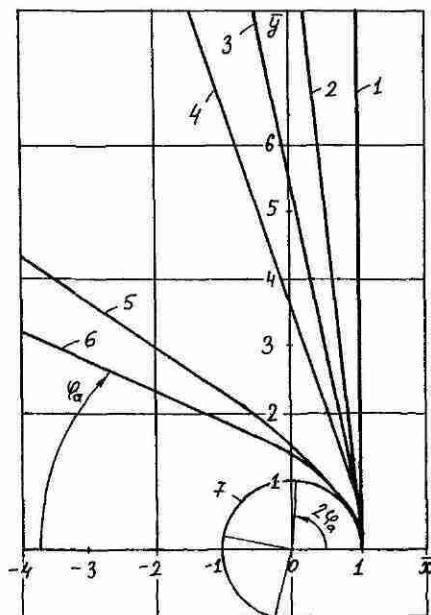


Рис.2. Траектории при $\alpha_1^0 = -0.3$ и при световой скорости в перигелии ($\beta_p = 1_0$). Знак * — соответствие данных

№	5	4	2	1	5	3	1	6	1	7	1
$\beta_{\tau 0}$	0.96	0.96	0.96	0.96	0.97	0.97	0.97	0.98	0.98	0.987	0.987
α	-0.576	-0.576	-0.576	-0.576	-0.582	-0.582	-0.582	-0.588	-0.588	-0.592	-0.592
$\beta_{r 0}$	0.1	0.2	0.25	0.28	0.1	0.2	0.243	0.1	0.199	0.1	0.1
$\frac{\beta_{r\infty}}{r_a^*}$	0.712	0.850	0.949	1.0	0.707	0.897	1.	0.681	1.	1.04*	1.
φ_a^0	35.	73.	84.	90.	35.	78.	90.	23.	90.	41.2	90.

По-видимому, для конечных орбит, аналогичных 7 на рис.2, подкоренное выражение в (18) при больших \bar{r} должно быть отрицательным. Найдём предель-

ные параметры α_{1p}^0 и $\beta_{op} = \sqrt{\beta_{r0}^2 + \beta_{\tau p}^2}$ из условия $\bar{v}_r^0 = 0$ при $\bar{r} \rightarrow \infty$. После преобразования (18) получаем

$$\alpha_{1p}^0 = 0.5 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_{\tau p}^2} \cdot \ln(1 - \beta_{op}^2)}{\beta_{\tau p}^2} \quad (22)$$

При $r_0 = r_p$ и малых скоростях $\beta_{op} = \beta_{\tau p} \rightarrow 0$ отсюда следует $\alpha_{1p}^0 = -0.5$. Т.е. соотношение (22) определяет параметры параболических траекторий. Если же трансверсальная скорость частицы больше предельной скорости β_{pc} и больше $\beta_{\tau p}$, то траектория будет конечной и будет иметь световую скорость в перигелии. В соответствии с этими положениями были определены параметры, при которых такие конечные траектории наиболее ярко выражены (см. рис.3). С увеличением радиальной скорости для траекторий 1, 2, 3 величина подскока $\Delta \bar{r} = \bar{r}_a - 1$ и угол до апоцентра увеличиваются. С дальнейшим увеличением β_{r0} величина r_a непрерывно растет, а угол φ_a достигает максимума для траектории 4, затем уменьшается. При этом траектории 4 и 5 имеют апоцентрий, стоящий от перигелия больше, чем на один оборот. С дальнейшим повышением радиальной скорости траектория (см. линия 6) размывается. С приближением β_0 к единице траектории выполаживаются (см. 1 - 3 на рис.2) и при световой скорости переходят в прямую. Гиперболовидные траектории на рис.1 и 2 могут на отдельных участках совпадать. Однако им соответствуют разные параметры взаимодействия α , и скорости движения частиц по ним разные.

Итак, в области $-0.5 < \alpha_1 < 0$ имеют место гиперболовидные траектории при скоростях частиц в перигелии $\beta_p < \beta_{pc}$, траектории захвата частиц из бесконечности на круговую орбиту при $\beta_p = \beta_{pc}$ и траектории при стремящейся к скорости света скорости частиц в перигелии при $\beta_{\tau 0} > \beta_{pc}$. В последнем случае при $\beta_{\tau 0} > \beta_{\tau p}$ имеют место конечные траектории, период которых может существенно отличаться от 2π .

На рис.4 представлены досветовые траектории при $\alpha_1 = -0.5$, что в классическом случае ($\beta_p \rightarrow 0$) дает параболу. Уже при $\beta_p = 0.1$ траектория 1 является сильно вытянутым эллипсом. С увеличением скорости расстояние до апоцентра уменьшается, а угловое расстояние φ_a возрастает, и для предельной траектории оно превышает 2π . Для этой траектории, так же как и для предельной траектории 7 на рис.1, угол отсчитывается от $\bar{r} = 1.001$. А в области $1.001 > \bar{r} > 1$ угол $\varphi \rightarrow \infty$, т.е. в данном случае имеет место захват частицы из конечной области пространства на круговую орбиту. Здесь же (см. рис.4) представлена траектория 7 при $\beta_{r0} = 0.9$ и $\beta_{\tau 0} = 0.2$, которая имеет световую скорость в перигелии. Эта гиперболовидная траектория с отрицательным углом между асимптотами подобна траектории 6 на рис.3.

Итак, с увеличением скорости частицы параболическая траектория превращается в эллипсовидную, в которой перигелий за один оборот в соответствии с (21) поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Для предельной траектории свойственноминимальное расстояние до апоцентра $r_a = 5.456$. При еще больших скоростях траектории становятся гиперболовидными со световой скоростью в перигелии.

У эллипсовидных траекторий, как следует из рис.5, с увеличением скорости происходит уменьшение эксцентриситета и увеличивается поворот перигелия. У предельной траектории 5 апоцентрий мало выражен, поэтому она практически не отличается от круговой орбиты. Здесь же приведена траекто-

рия 6 со световой скоростью в перигелии, полученная при $\beta_{r0}=0.8$ и $\beta_{r0}=0.4$. Параметр взаимодействия α в этом случае больше единицы.

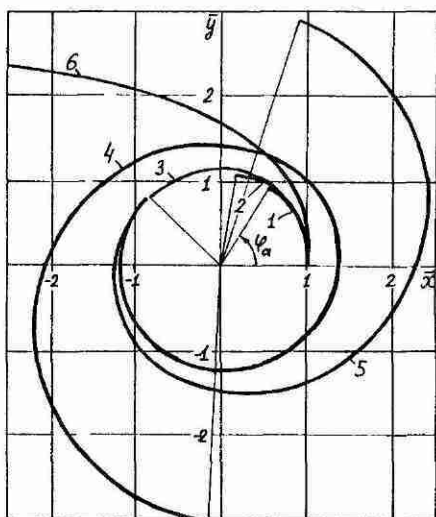


Рис.3. Конечные (1+5) траектории при световой скорости в перигелии ($\beta_p=1_0$)
 $\alpha_1^0=-0.498$, $\beta_{r0}=0.93$; $\alpha=-0.926$

№	1	2	3	4	5	6
β_{r0}	0.100	0.120	0.128	0.129	0.130	0.2
$\frac{r}{r_\infty} \beta_{r0}^*$	1.103	1.133	1.176	2.981	3.035	0.095*
φ_α^0	59.8	82.1	135.6	626.8	432.9	-18.24

Для определения возможных величин α воспользуемся их связью (17) с параметром α_1 . Тогда для предельных траекторий (15) получаем зависимость параметра взаимодействия $\alpha_c=\alpha$ со скоростью в перигелии β_{pc} в виде

$$\alpha_c = -2\beta_{pc}^2 \cdot \sqrt{1 - \beta_{pc}^2}. \quad (23)$$

Несложно показать, что это выражение имеет экстремум при $\beta_{pc} = \sqrt{2/3}$, и наибольшее по модулю значение параметра взаимодействия будет $\alpha_c = -4/\sqrt{27}$. При $|\alpha| > |\alpha_c|$ траектории будут уже иметь световую скорость в перигелии, и они будут или гиперболическими, или конечными. Таким образом, учитывая (16), можно сделать следующие выводы. Во-первых, для притягивающего центра с радиусом, меньшим гравитационного радиуса r_g (так называемая "черная дыра"), частицы могут проникать внутрь окружности гравитационного радиуса (см. траекторию 6 на рис.5) и на притягивающий центр не падают. И, во-вторых, частицы в перигелии приобретают световую скорость и вследствие уменьшения воздействия на них уходят на бесконечность (или в апоцент-

рий для конечных траекторий). Исключением является только частица, вектор скорости которой направлен строго по радиусу. Согласно (5) при $h=0$ и $r_0 \rightarrow \infty$ получаем

$$\beta_r = \sqrt{1 - (1 - \beta_{r_0}^2) \exp(-r_g/r)}. \quad (24)$$

В этом случае частица упадет на притягивающий центр, но ее скорость, как следует из (24), будет меньше скорости света. В классическом случае (10) для радиально движущейся из бесконечности частицы величина

$$\beta_r = \sqrt{\beta_{r_0}^2 + r_g/r}. \quad (25)$$

Если на бесконечности частица покоилась ($\beta_{r_0}=0$), то по достижении радиуса $r=r_g$ ее скорость будет равна скорости света. Так как этот процесс одинаков как для электромагнитного взаимодействия, так и для гравитационного, то величину r_g лучше называть световым радиусом.

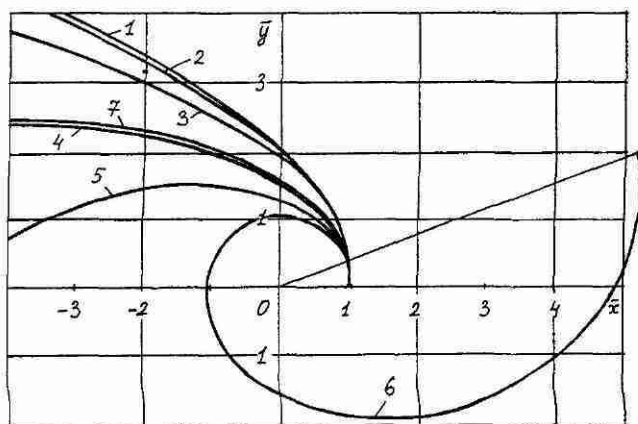


Рис.4. Траектории при $\alpha_1 = -0.5$ и при досветовой скорости (1+6) в перигелии ($\beta_p \approx \beta_{pc}$)

№	1	2	3	4	5	6	7
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.866	1.0
α	-0.01	-0.09	-0.25	-0.49	-0.64	-0.75	-0.9
$r_a / \beta_{r_\infty}^*$	236411.	2574.	250.7	37.28	13.16	5.456	0.195*
φ_a^0	180.2	182.2	186.8	200.7	224.3	383.6!	-7, 243

Итак, полученные результаты свидетельствуют о том, что для воздействий, распространяющихся со скоростью c_1 , притягивающий центр с радиусом $r \leq r_g$, т.е. "черная дыра", втягивает вещество более слабо, чем классический притягивающий центр, воздействие которого распространяется мгновенно.

На рис.6 представлены траектории при постоянных характеристиках вза-

имодельствующих объектов, т.е. при неизменном параметре α . С увеличением скорости в перицентрии у эллипсовидных траекторий (1 – 3) эксцентриситет увеличивается, а затем они размыкаются и переходят в гиперболовидные траектории (4 – 6), у которых угол между асимптотами растет. При еще большей скорости на бесконечности $\beta_{r\infty}$ (траектория 8) достигается световая скорость в перицентрии, угол φ_a увеличивается и стремится к $\pi/2$ для световой траектории 9. Следует отметить, что для $\beta_p = \beta_{pc}$ (траектория 7) угол между асимптотами меньше, так как интегрирование выполнено до $\bar{r} = 1.001$.

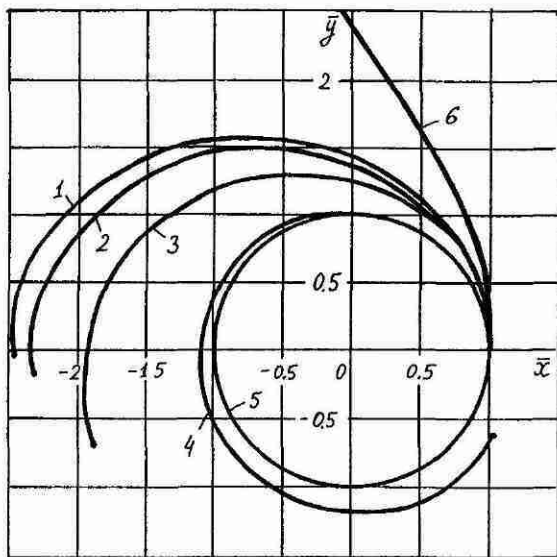
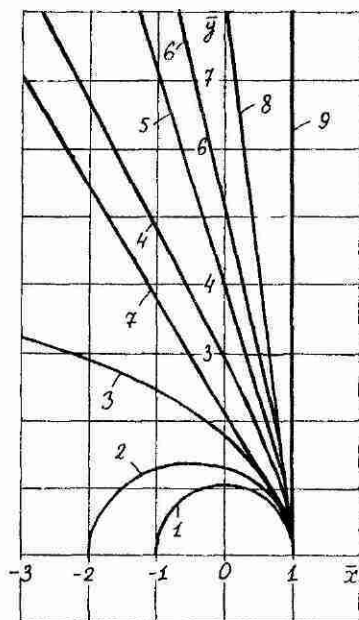


Рис.5. Траектории при $\alpha_1 = -0.7$ и при досветовой скорости (1÷5) в перицентрии ($\beta_p \leq \beta_{pc}$)

№	1	2	3	4	5	6
β_p	0.1	0.3	0.5	0.7	0.714	1.0
α	-0.014	-0.126	-0.350	-0.686	-0.714	-1.12
$\bar{r}_a / \beta_{r\infty}^*$	2.482	2.334	1.991	1.220	1.031	0.331*
φ_a^0	180.4	184.5	197.5	328.1	1340!	40.26

На рис.7 приведены гиперболовидные траектории при отталкивании взаимодействующих объектов. Расчеты производились при трех значениях α_1 и вариации β_p . С увеличением β_p полуугол между асимптотами φ_a возрастает и стремится к $\pi/2$ для световой траектории. Для траекторий параметр взаимодействия α положительный и может быть больше единицы. Скорость частицы с удалением от центра возрастает.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить Осипову Алену за выполнение компьютерных расчетов.

Рис 6 Траектории при постоянном параметре взаимодействия ($\alpha = -0.3$)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β_p	0 408	0 463	0 548	0 707	0 866	0 913	0 988	1 ₋₀	1
α_1	-0 9	-0 7	-0 5	-0 3	-0 2	-0 18	-0 154	-0 151	-0 15
$\bar{r}_a / \beta_{r\infty}^*$	1 036	2 074	157	0 488*	0 739*	0 809*	0 913*	0 968*	1 0*
φ_a^0	189 9	193 5	189 1	62 56	73 78	77 56	59 40 ¹	82 72	90

Приложение

Асимптотические решения

1. Решение вблизи $\bar{r}=1$

Подкоренное выражение в (9) обозначим через $f(\bar{r}^2)$. Видно, что $f(1)=0$. Разложим $f(\bar{r}^2)$ в окрестности $\bar{r}^2=1$ в ряд Тейлора

$$f(\bar{r}^2) \approx f(1) + f'(1)(\bar{r}^2 - 1) + f''(1) \frac{(\bar{r}^2 - 1)^2}{2} + \dots \quad (1\pi)$$

и ввиду малого отличия \bar{r}^2 от 1 ограничимся двумя первыми слагаемыми.

Согласно (9) производная имеет вид

$$\frac{df}{d(\bar{r}^2)} = \frac{\beta_p^2}{\bar{r}^4} + (1 - \beta_p^2) \exp \left[2\alpha_1 \beta_p^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - \beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} \right] \right] \times$$

$$\times \frac{\alpha_1 \beta_p^2}{(\bar{r}^2 - \beta_p^2)^{3/2}} \Big|_{\bar{r}=1} = \beta_p^2 \left[\frac{\sqrt{1 - \beta_p^2} + \alpha_1}{\sqrt{1 - \beta_p^2}} \right].$$

После подстановки производной в (1п), а $f(\bar{r}^2)$ в (9) интеграл (8) запишется в виде:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1} \sqrt{1 - \beta_p^2}} \int_1^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2 \sqrt{\bar{r}^2 - 1}}$$

В результате интегрирования получено выражение (12). Точное решение $\varphi(\bar{r}, \alpha_1)$ при $\beta_p = 0$ представлено соотношением (11), значения φ были сопостав-

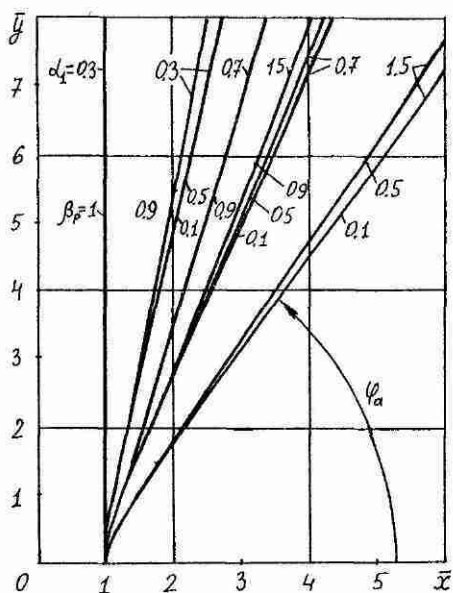


Рис.7. Траектории оттачивания

α_1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.7	0.7	0.7	1.5	1.5	1.5
β_p	0.1	0.5	0.9	1.0	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
α	0.006	0.15	0.486	0.6	0.014	0.35	1.134	0.03	0.75	2.43
$\beta_{r\infty}$	0.126	0.61	0.968	1.0	0.1543	0.707	0.993	0.98	0.827	0.9999
φ_a^0	76.7	76.9	79.1	90.	65.7	66.6	73.2	53.2	55.6	69.0

лены при разных α_1 . В результате было установлено, что при $\bar{r}=1.001$ отличия между решениями (11) и (12) нет до третьего знака после запятой включительно.

В предельном случае, при $\beta_p \rightarrow \beta_{pc}$ производная $f'(1) \rightarrow 0$. Поэтому для уточнения (12) необходимо рассмотреть вторую производную. После дифференцирования первой производной получаем

$$\frac{d^2 f}{d(\bar{r}^{-2})^2} = -\frac{2\beta_p^2}{r_p^6} - \frac{(1-\beta_p^2)\alpha_1\beta_p^2 \left(\alpha_1\beta_p^2 + 1.5\sqrt{\bar{r}^2 - \beta_p^2} \right)}{(1-\beta_p^2)^3 \exp \left[2\alpha_1\beta_p^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - \beta_p^2}} \right] \right]} \quad (2п)$$

В особой точке $\beta_p = \beta_{pc}$ при $\bar{r}=1$ вторая производная

$$f''(1) = -\beta_{pc}^2(0.25 + 0.5\beta_{pc}^2),$$

т.е. она конечна. Поэтому ввиду более высокого порядка малости по отношению к $(\bar{r}^2 - 1)$ третьим слагаемым в (1п) можно пренебречь, и выражение (12) остается справедливым при $\beta_p = \beta_{pc}$.

2. Аппроксимация при световой скорости

При $\beta_p = 1$ выражение (12) имеет особенность, поэтому для нахождения приращений φ в области $1 \leq \bar{r} \leq 1.001$ воспользуемся уравнением прямой, которое при $\alpha_1 = 0$ согласно (11) будет $\bar{r} = 1/\cos\varphi$. Откуда f

$$\varphi = \arccos(1/\bar{r}). \quad (3п)$$

При $\bar{r} = 1.001$ величина $\varphi = 4.47 \cdot 10^{-2}$ или $\varphi^0 = 2.56^\circ$, т.е. для световой частицы при изменении \bar{r} от 1 до 1.001 полярный угол изменяется на 2.56° .

3. Аппроксимация для апоцентра

При численном интегрировании (8) для эллипсовидных траекторий расчет ведется до малых величин $\bar{v}_{r\min}$, которые имеют порядок $1 \cdot 10^{-3}$. Необходимо оценить, какому приращению φ соответствует изменение радиальной скорости от $\bar{v}_{r\min}$ до нуля. С этой целью относительный радиус \bar{r} выразим через скорость \bar{v}_r , определенную из (10) и нормированную к параметрам в перигелии, и подставим в уравнение классической траектории (11). Откуда получаем

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - \bar{v}_r^2}}{\alpha_1 + 1}. \quad (4п)$$

Для того, чтобы учесть влияние относительной скорости β_p , воспользуемся асимптотикой (12) для перигелия. Легко показать, что для апоцентра асимптотика имеет аналогичный вид, но величины отнесены к трансверсальной скорости в апоцентрии v_a и радиусу апоцентра r_a , и она зависит от $\beta_a = v_a/c_1 = \beta_p/\bar{r}_a$ и $\alpha_{1a} = \alpha_1 \cdot \bar{r}_a$. Введем коэффициент влияния k как отношение угла φ , согласно (12), к этому же выражению при $\beta_p = 0$. Отсюда получаем

$$k = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 a}{1 + \alpha_1 a / \sqrt{1 - \beta_a^2}}} \quad (5п)$$

Тогда после умножения (4п) на (5п) аппроксимация для апоцентра запишется в виде

$$\varphi \approx \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 \bar{r}_a}{1 + \alpha_1 \bar{r}_a / \sqrt{1 - \beta_p^2} / \bar{r}_a^2}} \arccos \frac{\sqrt{(\alpha_1 + 1)^2 - \bar{v}_r^2}}{\alpha_1 + 1} \quad (6п)$$

Ввиду приближенного характера (6п) для предельной траектории при $\beta_p \rightarrow \beta_{pc}$ были выполнены численные расчеты при последовательном уменьшении $\bar{v}_{r\min}$. Они показали, что частица приходит в апоцентр при конечном угле φ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *T.E. Phipps, Jr. Weber - types laws of Action - at - a - Distance in Modern Physics // Apeiron. 1990, N8, p.8-14.*
2. *A.K.T. Assis. Modern Experiments Related to Weber's Electrodynamics / In "Proceedings Conference on Foundations of Mathematics and Physics, Perugia, 1989, V. Bartocci and J.P. Wesley (editors), Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, Germany, 1990, p. 8 - 22.*
3. *J.J. Smulsky. A New Approach to Electrodynamics and to Theory of Gravitation / In "What physics for the next century? Prospects for renewal, open problems, "heretical" truths." - Proceeding of the International Conference, Ishia, Italy, 29.09 - 1.10.1991. - Published by Editrice Andromeda, Bologna. 1992, p.336-344.*
4. *T.G. Barnes, R.R. Pempek, H.L. Armstrong. A Classical Foundation for Electrodynamics // Creation Research Society Quarterly. - 1977, 14, June. p.38-45.*
5. *И.И. Смутьский. О некоторых вопросах физики // Институт проблем освоения севера СО АН СССР. - Тюмень: 1988, 52 с. - Деп. в ВИНТИ 28.02.1989, N 2032 - В 89.*
6. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. - М.: Наука, 1973, 504 с.*