

Смульский И.И., Сеченов К.Е. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли / Теория и практика оценки состояния криосферы Земли и прогноз ее изменения: Материалы Международной конференции. Т.1.-Тюмень: ТюмГНГУ, 2006. – С. 284-289.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СОЛНЦА НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗЕМЛИ

Смульский И.И., Сеченов К.Е.

Институт криосферы Земли СО РАН, 625000, Тюмень, а/я 1230, Россия.

1. Введение. В настоящее время наблюдается потепление климата и различные катастрофические воздействия природных явлений на жизнь человеческого общества. Климат изменялся и в прошлом: прослеживаются периодические изменения осадочных слоев на материках и в океанах, колебания уровней океанов и повторяющиеся следы деятельности ледников. Климат Земли напрямую зависит от инсоляции, на которую, в свою очередь, оказывают влияние орбитальное и вращательное движение Земли. Такую Астрономическую теорию ледниковых периодов развил Милутин Миланкович в 20-е годы XX века, и затем ее рассматривали несколько групп исследователей. При этом задача вращательного движения решалась весьма приближенно. В полном объеме ее можно решить численным методом. Чтобы учесть все особенности необходимо проанализировать основания при выводе дифференциальных уравнений. Кроме того, ряд физических причин поведения оси Земли следует из теоремы моментов. Поэтому вначале рассмотрим ее следствия на примере трех тел.

2. Теорема моментов и ее приближенные результаты. Вращательное движение Земли рассматриваем в невращающейся системе координат $x_1y_1z_1$, связанной с центром масс Земли. Вращательное движение механической системы описывается теоремой изменения момента количества движения относительно подвижного центра:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k), \quad (1)$$

где \vec{K}_O - момент количества движения (кинетический момент) Земли относительно центра O в системе $x_1y_1z_1$; $\vec{m}_O(\vec{F}_k)$ - момент относительно этого центра, действующей на тело внешней силы \vec{F}_k в той же системе $x_1y_1z_1$.

Пусть юла (см. рис.1а) имеет угол θ с осью z_1 и вращается вокруг своей оси z с угловой скоростью $\dot{\phi}$. В ее центре масс C приложена сила тяжести P . Под действием момента сил $m_O = Pa \cdot \sin \theta$ ось юлы z начнет поворачиваться вокруг точки O с угловыми скоростями $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$. Вектор абсолютной угловой скорости юлы будет $\vec{\omega} = \vec{\dot{\phi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}}$. Если моментом инерции юлы J_z , а ее скорость вращения $\dot{\phi}$ значительно больше скоростей поворота оси $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$, то приближенный кинетический момент

$\vec{K}_{Oa} \approx \vec{K}_O \approx J_z \cdot \vec{\phi}$ будет направлен вдоль оси z (см. рис.1а), а теорема моментов (1) запишется $\dot{\vec{K}}_{Oa} \approx \vec{m}_O$. Так как вектор момента сил m_O перпендикулярен K_{Oa} , то по величине кинетический момент изменяться не будет: $K_{Oa} = J_z \cdot \dot{\phi} = const$, а его изменение $\Delta \vec{K}$ по направлению определится вектором m_O . Тогда в плоскости $x_1 O y_1$ за время Δt кинетический момент получит приращение $\Delta K = \dot{K}_{Oa} \cdot \Delta t = M \cdot \Delta t$, что приведет к его повороту относительно оси z_1 на угол $\Delta \psi$. Выразив приращение кинетического момента через приращение угла: $\Delta K = \dot{K}_{Oa} \cdot \sin \theta \cdot \Delta \psi$, получаем скорость поворота кинетического момента: $\dot{\psi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \psi / \Delta t = m_O / (K_{Oa} \cdot \sin \theta)$. Из рис 1а видно, что при повороте K_{Oa} , а, следовательно, и оси юлы на угол $\Delta \psi$ момент силы m_O также повернется на такой же угол относительно оси z_1 . Так как в новом положении силовое воздействие не изменится, то ось юлы непрерывно будет прецессировать против стрелки часов со скоростью прецессии $\dot{\psi}$. После подстановки в $\dot{\psi}$ значения момента m_O скорость прецессии запишется $\dot{\psi} = Pa / (J_z \cdot \dot{\phi})$.

Как видно из рис.1б, в случае подвешенного колеса момент сил направлен за стрелкой часов. Поэтому прецессия оси колеса будет происходить за стрелкой часов, а ее скорость $\dot{\psi}$ будет определяться тем же выражением.

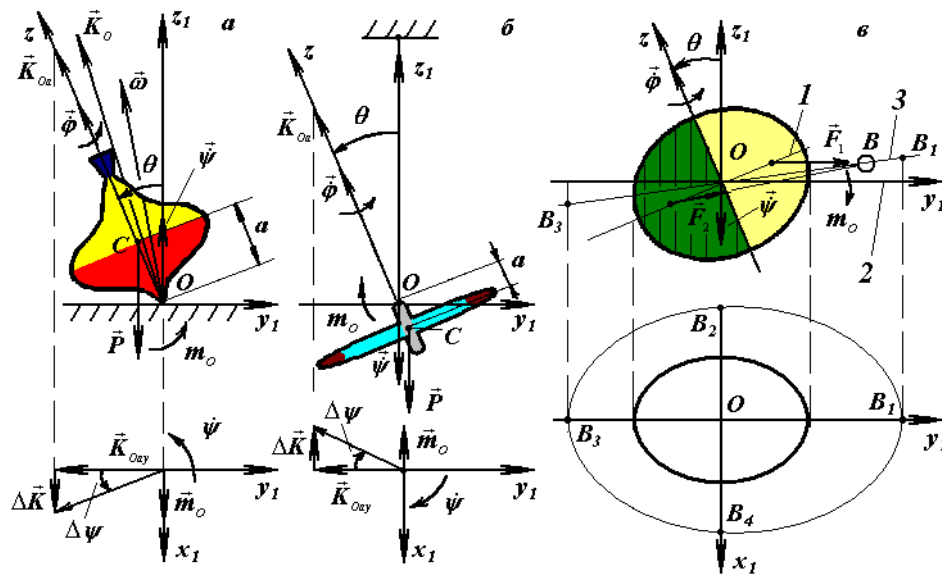


Рис.1 Прецессия вращающихся тел: а – юлы на опорной поверхности $x_1 O y_1$; б – подвешенного в т. O колеса; в – свободной Земли. 1 и 2 – плоскости экватора Земли и ее орбиты; 3 – плоскость орбиты воздействующего на Землю тела B .

На рис.1в представлена схема воздействия тела B на вращающуюся Землю. В случае центрально-симметричной Земли действие тела B на ближнюю и дальнюю от тела части Земли выразится в виде сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равнодействующая которых пройдет через центр O . Для сплюснутой к экватору Земли сила \vec{F}_1 увеличится, а сила \vec{F}_2 уменьшится, в результате чего возникнет момент сил m_O , направленный, как и на

рис.1б, по стрелке часов. Поэтому ось Земли будет прецессировать за стрелкой часов, а скорость прецессии будет описываться той же формулой $\dot{\psi} = m_o / (K_{oa} \cdot \sin \theta)$.

Из анализа воздействия тела на Землю (см. рис.1в) следуют периоды колебаний прецессии Земной оси. Она будет подвержена прецессионным и нутационным колебаниям с полупериодами обращения планет, Солнца и Луны. Кроме того, ось Земли будет испытывать колебания с периодами сближений Земли с планетами в точках B_1 и B_3 .

3. Дифференциальные уравнения вращательного движения. Вывод дифференциальных уравнений всегда проводился с прицелом на их приближенное решение. Поэтому за трехвековую историю их создания они практически нигде полностью не приводятся. Кроме того, вывод их осуществляется несколькими способами с множественными переходами между системами координат. В результате их анализа мы наметили наиболее прямой путь с исключением промежуточных переходов.

Вращающуюся совместно с Землей систему координат xuz (см. рис. 1в) закоординируем относительно осей в невращающейся системе координат $x_1y_1z_1$ с помощью углов Эйлера: φ, ψ, θ , где ψ - угол прецессии, который определяет положение в плоскости x_1Oy_1 линии OK пересечения плоскости экватора. Моменты сил в направлении осей системы координат OKz_1z равны производным от силовой функции U : $M_{\dot{\psi}} = M_{z_1} = \partial U / \partial \psi$, $M_{\dot{\theta}} = M_K = \partial U / \partial \theta$, $M_{\dot{\varphi}} = M_z = \partial U / \partial \varphi$. Спроектируем правую и левую часть теоремы моментов (1) на эти оси:

$$\dot{K}_{O\dot{\psi}} = \partial U / \partial \psi, \quad \dot{K}_{O\dot{\theta}} = \partial U / \partial \theta, \quad \dot{K}_{Oz} = \partial U / \partial \varphi. \quad (2)$$

Дальнейший вывод осуществляется в следующей последовательности. Определяются проекции кинематического момента K_x, K_y, K_z на оси вращающейся системы координат xuz . Производные от них выражаются через углы Эйлера: φ, ψ и θ , и с их помощью определяются проекции $\dot{K}_{O\dot{\psi}}, \dot{K}_{O\dot{\theta}}, \dot{K}_{Oz}$ на оси системы координат OKz_1z . Силовая функция U также выражается в Эйлеровых углах. После подстановки этих величин в теорему моментов (2) получаем дифференциальные уравнения вращательного движения Земли:

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta}\text{ctg}\theta + \dot{\theta} \frac{J_z \omega_E}{J_x \sin \theta} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM_i E_d J_z}{r_i^5 J_x} \{0.5 \sin(2\psi)(x_{1i}^2 - y_{1i}^2) - x_{1i} y_{1i} \cdot \cos(2\psi) + z_{1i} \text{ctg}\theta (x_{1i} \cos \psi + y_{1i} \sin \psi)\}; \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} = 0.5\dot{\psi}^2 \sin(2\theta) - \frac{J_z \omega_E \dot{\psi} \sin \theta}{J_x} - \sum_{i=1}^n \frac{3GM \cdot E_d J_z}{2r_i^5 J_x} \left\{ \sin(2\theta) [x_{1i}^2 \sin^2 \psi + y_{1i}^2 \cos^2 \psi - z_{1i}^2 - x_{1i} y_{1i} \sin(2\psi)] + 2z_{1i} (x_{1i} \sin \psi - y_{1i} \cos \psi) \cos(2\theta) \right\}; \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \omega_E - \dot{\psi} \cdot \cos \theta. \quad (5)$$

где $\omega_E = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/c}$ - проекция абсолютной скорости вращения Земли на ее ось z .

$J_y = J_x$ - момент инерции осесимметричной Земли в плоскости экватора;

$E_d = (J_z - J_x) / J_z$ - динамическая эллиптичность Земли.

x_{1i}, y_{1i}, z_{1i} - координаты тел M_i , действующих на Землю.

В результате численного решения задачи взаимодействия планет, Солнца и Луны мы получили изменения параметров их орбит на интервале до 100 млн. лет. По параметрам орбит определяется положение орбиты и ее форма, а положение тела в текущий момент времени рассчитывается по формулам эллиптического движения. Таким образом, разработан алгоритм, который позволяет определить координаты действующих на Землю тел, в любой момент из рассматриваемого интервала времени.

4. Результаты. На рис. 2а представлены результаты интегрирования уравнений (3)-(4) за 0.1 года при действии Солнца на вращательное движение Земли. Угол прецессии ψ , начиная с нулевого значения, уменьшается, совершая колебания амплитудой ψ_{a1} и периодом $T_1 = 0.9935 \text{ дня}$. Угол нутации θ представлен в виде разности $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Из графика $\Delta\theta(T)$ видно, что угол наклона подвижной плоскости экватора к неподвижной эклиптике уменьшается, совершая колебания с амплитудой $\Delta\theta_{a1}$ и тем же периодом T_1 . Угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ с периодом T_1 и амплитудой $\dot{\psi}_{a1}$ колеблется вокруг некоторого среднего значения. С таким же периодом T_1 и амплитудой $\dot{\theta}_{a1}$ колеблется угловая скорость нутации вокруг нулевого значения.

На рис. 2б представлена динамика оси Земли за 1 год. Угол прецессии увеличивается по часовой стрелке, совершая колебания с периодом $T_2 = 0.5 \text{ года}$ и амплитудой ψ_{a2} . С таким же периодом T_2 и амплитудой θ_{a2} колеблется угол нутации вокруг некоторого среднего значения.

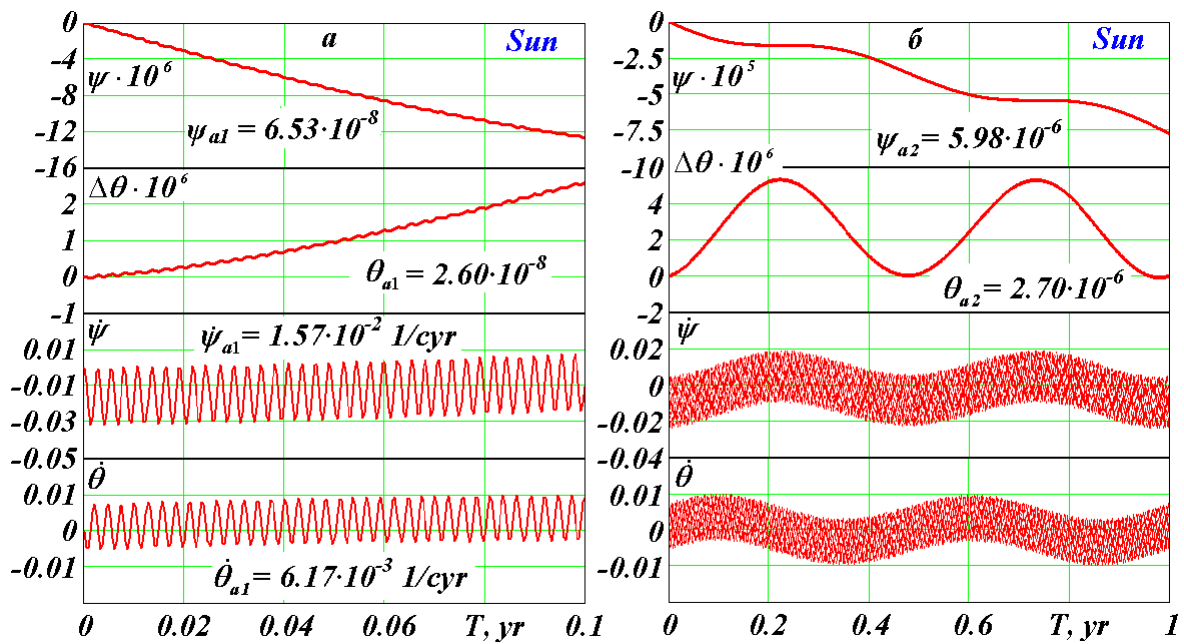


Рис. 2. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: a – за 0.1 года, b – за 1 год. Углы прецессии ψ и нутации θ даны в радианах, а скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ - в радианах в столетие.

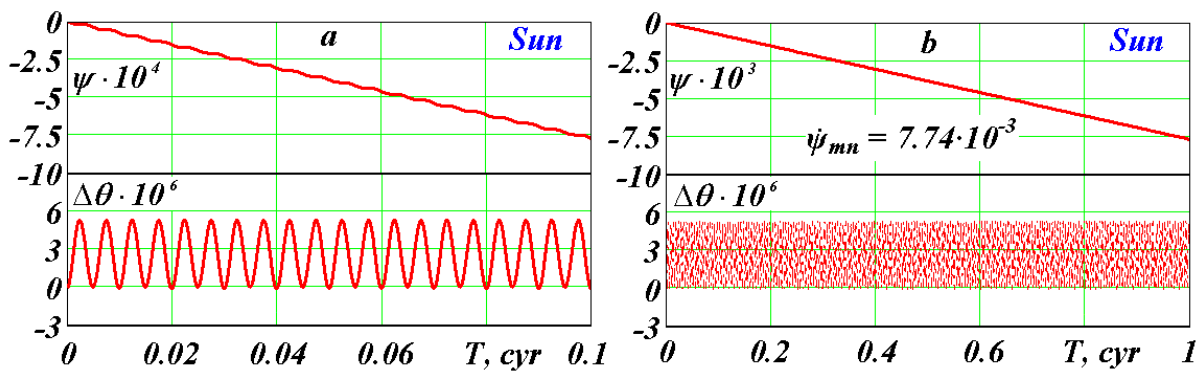


Рис. 3. Воздействие Солнца на вращательное движение Земли: a – за 10 лет, b – за 100 лет. Обозначения см. на рис. 2.

На рис.3а представлена динамика оси за 10 лет. Угол прецессии ψ с отмеченными ранее полугодовыми колебаниями изменяется практически линейно, а угол нутации с полугодовым периодом T_2 колеблется вокруг среднего значения. Динамика оси Земли за 100 лет показана на рис.3б. Угол прецессии ψ изменяется линейно со средней скоростью $\dot{\psi}_{mn} = 7.74 \cdot 10^{-3} \text{ рад/ст.}$ Угол нутации в виде $\Delta\theta$ изменяется с суточными и полугодовыми периодами в неизменных пределах.

Полученные результаты согласуются с данными наблюдений и результатами других авторов.