МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТЮМЕНСКАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ КРИОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

И.И. СМУЛЬСКИЙ

ДИНАМИКА

(Конспект лекций по теоретической механике
для строительных специальностей)

Вторая редакция

Тюмень
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЮМЕНСКОЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНОЙ АКАДЕМИИ

2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ
ко второй редакции.

Настоящий конспект лекций был выпущен в 2001 г. тиражом 50 экз. Он пользовался спросом у студентов, и поэтому этого количества было недостаточно.

В настоящем выпуске внесены исправления и добавлена тема 11. Прямолинейные колебания точки. Дополнить конспект лекций этой темой мне посоветовала Ю.Н. Шагисултанова. В подготовке этой редакции принимала участие В.С. Ботвина.

ВВЕДЕНИЕ

Обычно динамикой, после статики и кинематики, завершается изучение теоретической механики. Однако определение понятий механики невозможно без динамики. Поэтому рассмотрим их в этом введении, которое предлагается студентам для самостоятельной проработки. Если позволит время, то преподаватель может изложить этот материал в виде следующей темы: «Тема 11. Окружающий мир и описание взаимодействий в нем». **Лекция 16.**

Как мы убедились все теоремы и законы механики вытекают из основного ее закона $\vec{F} = m\vec{a}$. Чем обусловлен этот закон? Является ли он законом природы, а если нет, то откуда он следует? Прежде, чем ответить на эти вопросы, проанализируем наши представления об окружающем мире.

ОКРУЖАЮЩИЙ МИР И ЕГО ОПИСАНИЕ. Все, что нас окружает, и с чем мы постоянно имеем дело, можно разделить на две области. Первая – это окружающий мир, который не зависит от наших рассуждений: небо, звезды, деревья, наш дом, предметы в нем и т.д. Вторая область – это описание окружающего мира, т.е. его понимание. Оно содержится в книгах, изучается в школе, имеется в нашем сознании. Если объекты окружающего мира мы своими рассуждениями изменить не можем, то наше понимание мира постоянно меняется. Например, раньше человек представлял, что Земля является центром Вселенной и небосвод вращается вокруг Земли. Сейчас мы знаем, что Земля вращается вокруг своей оси, обращается вокруг Солнца, Солнце совершает движение вокруг центра Галактики, а последняя движется, взаимодействуя с другими галактиками. Однако существует масса других представлений, которые наши потомки сочтут заблуждениями, и понимание мира коренным образом изменится. Поэтому из всех представлений можно выделить **знания** о мире – это представления, которые не претерпят существенных изменений со временем.

Опыт показывает, что наши представления будут являться **знаниями**, если описание мира будет основываться на сопоставлении свойств его объектов со свойствами эталонных образцов. Основные понятия механики получены именно таким способом.

ИЗМЕНЕНИЕ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА И ВРЕМЯ КАК ЕГО МЕРА. Все объекты подвержены изменениям. Человек рождается ребенком, растет, превращается в юношу, становится зрелым, затем старится и умирает. На протяжении жизни человека происходят другие изменения. Ежедневно Солнце перемещается по небосводу, происходят смена дня и ночи, фаз Луны, сезонов года. Многие из изменений повторяются и являются циклическими, другие бывают уникальными, например, появление сверхновой звезды. Свойства изменения и движения характеризуют все объекты окружающего мира.

Для определения меры изменения объекта человек сопоставляет это изменение с каким-либо эталонным изменением. В результате сопоставления определяется величина изменения. Она выражается в количестве эталонных изменений или в количестве их долей и называется **временем**. Например, изменение человека, т.е. его жизнь, проходит в среднем за 70 оборотов Земли вокруг Солнца. Существует несколько результатов сравнения изменений: длительность, промежуток времени, момент времени и т.д., которые являются синонимами либо уточняют особенности изменений. **Промежуток времени** обозначает количество циклов эталонного изменения, эквивалентных рассматриваемому изменению. А **момент времени** рассматриваемого изменения обозначает привязку его к определенному циклу эталонного изменения.

В процессе человеческой деятельности была создана система эталонов изменений, связанных с циклическими движениями Земли и их долями: год, сутки, час, минута, секунда.

ВЕЛИЧИНА ОБЪЕКТОВ И ЕЕ МЕРА. Вторым свойством объектов окружающего мира является их величина. При сопоставлении обнаруживается, что один объект меньше или больше другого. Так, палец меньше стопы, стопа меньше руки (до локтевого сустава), рука меньше человека, человек меньше дерева. Многие из перечисленных объектов выбирались в качестве эталонов: дюйм, фут, локоть, шаг. **Величина** объекта определяется в результате сопоставления его с эталоном и выражается количеством эталонов или количеством долей эталона. В настоящее время большая часть человечества пользуется специально созданным эталоном величины или длины – платино-иридиевым брусом *x*-образного сечения, который хранится в Севре (Франция) в международном бюро мер и весов. Величина бруса при температуре 0 ^{o}С между двумя нанесенными на нем штрихами называется **метром**. Таким образом, величина объектов как в макро-, так и в микромире выражается в количествах или в долях метра.

Величина одного человека может быть больше другого в направлении от пят до головы, больше третьего в направлении плеч и больше четвертого в направлении спина – живот. Это свойственно и для других объектов, т.е. им присущи три вида величины в трех разных направлениях. Однако для их измерения используется один и тот же эталон.

При рассмотрении двух тел необходимо определить величину промежутка между ними. Величину промежутка, как и величину объекта, рассматривают в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Величины промежутков между объектами измеряются тем же эталоном длины. Места, занимаемые телами, и промежутки между ними мы называем **пространством**.

Существует много разновидностей мер величины объектов: размер, длина, ширина, высота, глубина, расстояние и т.д. Все они получаются при сравнении величины объекта с одним и тем же эталоном величины. **Размер** объекта – это результат сопоставления величины объекта с величиной эталона. **Длина** – наибольший размер объекта, **ширина** – средний размер, как правило, в горизонтальной плоскости. **Глубина** – размер объекта по вертикали вниз. **Расстояние** между объектами – размер промежутка между ними. Существует ряд свойств объектов: площадь, объем, форма, которые определяются комбинацией размеров объекта.

Итак, в результате сопоставления свойств изменчивости и величины с соответствующими свойствами тела, выбранного за эталон, мы получаем представление о мире. Изучение изменчивости позволяет узнать о продолжительности жизни животных, скорости движения ледников, закономерностях в движении планет, формировании геологических периодов на Земле, историю человеческого общества и т.п. Изучение величины тел позволяет узнать длину рек, высоту гор, расстояния между городами, размер Земли и расстояние до Солнца. Многие науки возникли благодаря измерению величины тел: геометрия, география, астрономия. По-видимому, объем знаний, полученных с помощью измерения изменчивости и величины тел, является самым большим. Представления о мире, полученные таким способом, остаются практически неизменными, поэтому мы их считаем знаниями о мире.

ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТОВ И ЕГО МЕРЫ. Изменение окружающего мира происходит в разных формах. Одна из них – движение. При движении изменяется промежуток между объектами. Мерой движения является скорость. **Скорость** движения одного объекта относительно другого определяется как отношение элементарного изменения расстояния Δl между ними за элементарный промежуток времени Δt к величине этого промежутка, т.е. $\upsilon = \Delta l / \Delta t$. Так как рассматривается изменение промежутка между двумя объектами, то скорость характеризует движение одного объекта по отношению ко второму. Поэтому **скорость – это свойство** не одного объекта, а **двух**. Следовательно, при взаимодействии многих объектов необходимо рассматривать их взаимные скорости друг с другом, т.е. рассматривать изменение во времени их взаимных расстояний.

Расположение объектов друг относительно друга может быть в трех различных направлениях. Поэтому имеется три скорости, которые при описании их векторной величиной в декартовой системе координат определяются тремя компонентами вектора скорости

$$\vec{\upsilon} = \vec{i}\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z. \qquad (В.1)$$

Скорость $\vec{\upsilon}$ может оставаться неизменной. В этом случае объект движется относительно другого равномерно и прямолинейно. В частном случае нулевой скорости расстояние между объектами не изменяется и они находятся в покое друг относительно друга. В то же время относительно других объектов они могут иметь любые скорости.

Скорость тела может изменяться. Например, неподвижный объект приходит в движение или в процессе движения увеличивается его скорость, или изменяется ее направление. Так как скорость пропорциональна изменению расстояния между двумя телами, то изменение скорости может быть вызвано изменением движения каждого из них. Для характеристики изменения скорости тела было введено понятие ускорения $\vec{w}$, которое отражает изменение скорости только одного объекта. Для этого вводится некоторая система отсчета, которая в момент t имеет одинаковую с телом скорость $\vec{v}$, и ее скорость в дальнейшем не изменяется. Эту систему назвали инерциальной в том смысле, что она движется по инерции, т.е. на нее ничто не воздействует и не изменяет ее скорость. В дальнейший момент времени $t+\Delta t$ рассматривается уже не изменение скорости по отношению ко второму телу, а изменение $\Delta\vec{v}$ по отношению к этой неускоренной системе. Средняя величина **ускорения** определяется как отношение изменения скорости за элементарный промежуток Δt к величине промежутка и в векторном виде записывается

$$\vec{w} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{B.2}$$

Так определенное ускорение тела является уже его абсолютной характеристикой, а не относительной, привязанной к другим объектам.

ВОЗДЕЙСТВИЕ И ЕГО ОПИСАНИЕ. Почему тело приобретает ускорение? Человек убедился, что **все** случаи ускоренных движений тел имеют причину: на них действуют другие тела. Поэтому воздействие другого тела на первое – это есть способность второго тела привести в движение первое тело, либо изменить его движение. Изменить движение тела – это значит изменить его скорость либо по величине, либо по направлению, т.е. сообщить ему ускорение $\vec{w}$. Отсюда следует, что **величина воздействия на тело определяется величиной ускорения, которое тело приобретает или приобретет, когда это воздействие начнется.**

Если нет ускорения первого тела, то и нет воздействия второго, либо воздействие второго тела скомпенсировано обратным по направлению воздействием третьего. Например, подвешенный на пружине камень (первое тело) притягивается Землей (второе тело), но он не изменяет свое движение, так как пружина (третье тело) противодействует этому. Она создает воздействие обратное по направлению воздействию Земли, и камень находится в покое. Пружина при этом растягивается на какую-то величину Δl. Поэтому была введена **сила** для характеристики воздействия на тело при отсутствии движения. Она определяется изменением свойств третьего тела (например, длины пружины), которое противодействует взаимодействию первого и второго тел. Если убрать воздействие третьего тела, то первое тело под воздействием второго начнет движение. Так как это воздействие характеризуется той же силой *F,* то она является характеристикой воздействия и при движении. Сила имеет такое же направление, что и ускорение. Аналогично ему и в пространстве характеризуется тремя составляющими: $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$.

Противодействие третьего тела может быть выражено не только растяжением пружины, но и ее сжатием, если она, например, расположена между притягивающимися телами. Третье тело может быть и не пружиной, а его деформация может измеряться тензодатчиками или с помощью пьезоэффекта. Кроме того, противодействие третьего тела может быть выражено не упругой деформацией, а другим воздействием. При измерении взаимодействия двух подвешенных на нитях заряженных шариков их отклонению от вертикали противодействовали гравитационным притяжением к Земле.

Обычно величина воздействия в виде силы $\vec{F}$ определяется величиной деформации Δl, созданной эталонным воздействием. Шкала силы построена так, чтобы единица силы в любом месте шкалы соответствовала одному и тому же воздействию на определенное эталонное тело. В настоящее время за эталонное тело принят платино-иридиевый цилиндр, диаметром и высотой равный 39 мм, который хранится в Париже. При воздействии на него Земли он растягивает пружину на определенную длину, которая выражает величину силы в один килограмм (в системе МКГСС). Итак, воздействие Земли на эталон заключается в том, что он падает с ускорением 9,8 м/с^2. Мы же описываем это воздействие величиной силы в $F = 1$ кГ.

Если присоединить к пружине n эталонов, то они растянут ее на длину эквивалентную n кГ. И мы говорим, что Земля воздействует на них силой в $F = n$ кГ. Другое тело, находящееся под воздействием, тоже может растянуть пружину на n_1 кГ, т.е. как n_1 эталонных цилиндров. Но такое тело, как и все другие тела, падает все с тем же ускорением 9,8 м/с^2. Таким образом, при воздействии на разные тела с одним и тем же ускорением силы воздействия на них будут разными. То есть, одна только сила не может при движении характеризовать воздействие на тело. Поэтому введена **масса тела $m = n$ – как количество эталонных тел, которые при воздействии, характеризуемом одинаковым ускорением, растянут пружину на ту же величину, что и тело**. Тогда при любом воздействии, которое измерено величиной силы $\vec{F}$, на любое тело, эквивалентное m эталонам, ускорение тела будет

$$\vec{w} = 9.8 \cdot \vec{F} \big/ m. \qquad \text{(В.3)}$$

В отличие от системы МКГСС в системе СИ за единицу силы $\vec{F}$ принят 1 ньютон (Н), который характеризует такое воздействие на эталонный цилиндр, при котором он движется с ускорением 1 м/с^2. В системе СИ соотношение (В.3) в векторном виде запишется так:

$$\vec{w} = \vec{F} \big/ m. \qquad \text{(В.4)}$$

Выражение (В.4), известное как второй закон Ньютона, в рассмотренной системе единиц справедливо для любых воздействий. И как мы видим, оно является результатом нашего выбора характеристик воздействия и единиц измерения. Аналогично первый и третий законы Ньютона – следствие нашего подхода. Например, **первый закон: если на тело не воздействуют другие тела, то оно сохраняет прямолинейное и равномерное движение**, – является следствием исходного определения воздействия – **это способ-**

ность одного тела привести в движение второе тело или изменить его движение. Из данного определения следует: если на тело не действуют другие тела, то оно не изменяет свое движение и остается в покое либо движется прямолинейно и равномерно.

Третий закон Ньютона состоит в том, что **сила действия второго тела на первое F_{12} равна силе противодействия первого тела на второе F_{21} и противоположна ей по направлению**:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{B.5}$$

Этот закон – следствие определения силы, которая **выражает противодействие третьего тела взаимодействию двух тел**. Величина противодействия, например деформация пружины, относится как к первому телу, так и ко второму. То есть, это одна и та же величина воздействия, которая, как и пружина, направлена на тела при их взаимном притяжении и от тел – при их взаимном отталкивании. Другими словами, одна и та же сила направлена взаимно противоположно на взаимодействующие тела.

Итак, воздействие на тело проявляется в его ускорении. Человек выражает и описывает воздействие в виде силы и массы рассматриваемого тела. В выбранной системе единиц масса однозначно характеризует связь ускорения тела, находящегося под воздействием, с измеренной силой. Отсюда следуют три важных вывода. Во-первых, во всех взаимодействиях масса тела будет одна и та же. Поэтому нельзя вводить гравитационную и инерционную массы. Это одна и та же масса. Во-вторых, из определения массы следует, что она от другого взаимодействия или движения изменяться не может. То есть, масса не может зависеть от скорости. В-третьих, масса свойственна лишь тому объекту, который может приобрести ускорение в результате воздействия другого объекта, и это воздействие можно измерить в виде силы. Так как для света, поля, энергии и т.п. данный процесс не реализован, то нельзя им приписывать массу. Таким образом, поле, энергия и вводимые частицы (фотон, гравитон и т.д.) массы не имеют.

Настоящее пособие является конспектом стандартного курса "Динамики" и не претендует на оригинальность. По-видимому, в нем отразилось влияние член-корреспондента АН УССР Якова Лазаревича Геронимуса, курс лекций которого автор прослушал в студенческие годы и "Краткого курса теоретической механики" Семена Михайловича Тарга.

Программа рассчитана на 17 лекций. Как правило, одна-две лекции попадают на праздничные дни. Поэтому курс разделен на 15 лекций, которые при наличии запаса времени могут быть растянуты.

Работа над настоящим пособием была завершена благодаря неослабеваемому интересу заведующего кафедрой строительной механики Ю.И. Карпенко. В его подготовке принимали участие А. В. Кузнецова, Ю. Н. Осинцева, М. А. Чекмарева, И. В. Бинеев и др. Всем им автор выражает свою сердечную признательность. Многие недостатки в рукописи были устранены благодаря квалифицированным замечаниям Л. Г. Агеносова и Т. А. Наруты. Автор выражает им свою благодарность.

Лекция 1

Программа занятий

Лекции – 34 часа, практических – 34 часа.

На практических занятиях решаются 3 – 4 задачи в тетради для практических занятий. На дом задается такое же количество задач, которые студент выполняет к следующему занятию в тетради для домашних заданий.

В течение семестра студент выполняет 4 расчетно-графических задания, которые оформляются в виде сброшюрованной записки формата А4. Задание проверяется преподавателем и выставляется предварительная оценка. Затем задание защищается студентом, студент объясняет выполненное задание, отвечает на один теоретический вопрос, заданный преподавателем, и предъявляет тетрадь с выполненными домашними заданиями. В случае неудовлетворительной защиты, студенту выдаются новые варианты заданий.

Допуск к экзамену получает тот студент, который защитил все расчетно-графические задания. Экзамен проводится по экзаменационному билету, в котором имеется два теоретических вопроса и одна задача. Студент, не решивший задачу, положительную оценку не получает.

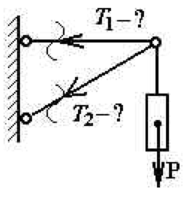
Как правило, студент, который в течение года систематически и самостоятельно решал домашние задачи и вовремя защищал расчетно-графические задания, сдает экзамен на 4 – 5.

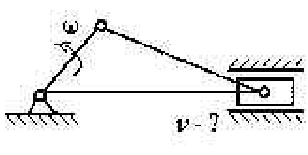
Тема 1. Введение в динамику и основные законы

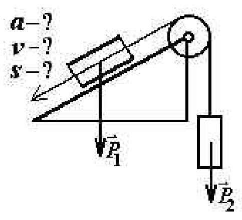
1.1. <u>Основные понятия и определения</u>

Следует напомнить, что механика лежит в основе большинства естественно-научных дисциплин, таких, например как физика, астрономия, геофизика и др., и является научной базой всех технических дисциплин. Без знаний теоретической механики невозможна добыча полезных ископаемых, переработка их в полезные материалы, создание разнообразных машин и строительство различных сооружений. Теоретическая механика подразделяется на три раздела.

Статика Кинематика Динамика







Статика – раздел механики, в котором изучаются силы и условия равновесия материальных тел, находящихся под воздействием сил.

Кинематика изучает геометрические свойства движения.

Динамика – раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под воздействием сил.

Постоянные и переменные силы

Постоянные силы - по величине и направлению не изменяются, например сила тяжести.

Переменные силы - модуль и направление изменяется, например сила тяги электровоза; сила сопротивления воздуха.

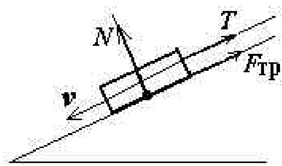
Активные силы и реакции связей.

Активные силы – это силы, которые, начав действовать на покоящееся тело, могут привести его в движение:

сила тяги электровоза приводит в движение состав; сила тяжести P_1, которая заставит тело скользить по наклонной плоскости.

Связь – все то, что ограничивает движение тела в пространстве.

Пример связей в виде наклонной плоскости и нити.



N – нормальная реакция наклонной плоскости;

$F_{тр}$ - реакция шероховатой поверхности;

T – реакция нити;

Реакция связи – сила, с которой данная связь препятствует возможным перемещениям.

Инертность тела проявляется в том:

1) что скорость тела изменяется не мгновенно после начала действия силы; пример: поезд при строгании с места длительное время набирает скорость, несмотря на значительные усилия локомотива.

2) тело сохраняет свое движение после прекращения действия силы; пример: разогнанный с горки вагон, движется длительное время без приложенных к нему движущих сил.

Масса тела является количественной мерой инертности тела.

Абстрактные понятия механики:

Материальная точка – это точка, обладающая массой. Тело заменяется материальной точкой, если можно пренебречь различием в скоростях движения его точек.

Механическая система – система материальных точек.

Твердое тело – система материальных точек, расстояние между которыми неизменно.

1.2. Законы динамики

Законы динамики сложились в результате обобщения тысячелетнего человеческого опыта. Их обоснование создавалось трудами многих выдающихся мыслителей. В древние времена движение и взаимодействие тел описывались так, как наблюдались. Так Аристотель (384 – 322 г. до н. э.) считал, что тяжелые тела падают быстрее и движение происходит под действием сил. Эти положения действительно отражают наблюдаемые явления. Однако с дальнейшим изучением явлений было установлено, что на падающее тело кроме притяжения Земли воздействует сила сопротивления воздуха.

Галилео Галилей (1564 – 1642 г.) установил, что в пустоте все тела падают с одинаковым ускорением. Он ввел ускорение тел и определил ***g***. Галилей пришел к выводу, что при горизонтальном движении, в отсутствии воздуха тела будут двигаться без изменения скорости.

Сформулированы законы динамики И. Ньютоном в 1687 г. в его фундаментальной работе «Математические начала натуральной философии».

Первый закон (закон инерции): материальная точка, изолированная от воздействия других тел, сохраняет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы от других тел не заставят ее изменить это состояние.

$$a = 0; \quad v = \text{const}$$ - закон инерции.

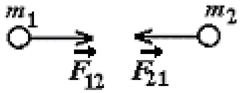
Система отсчета – тело, по отношению к которому рассматривают движение материальной точки. В математике ее представляют в виде системы координат.

Инерциальная система отсчета – система, которая покоится или движется без ускорения по инерции. В такой системе справедлив закон инерции.

Второй закон: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получит под действием силы, равно этой силе по модулю и направлению.

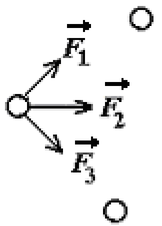
$$m\vec{a} = \vec{F}$$ -второй закон есть **основной закон динамики**.

Третий закон: Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположных направлениях (закон равенства действия и противодействия).



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$ - третий закон.

Рассмотрим действие на тело многих тел силами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$.



При действии только одной силы ускорения материальных точек будут:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1; \quad m\vec{a}_2 = \vec{F}_2; ... m\vec{a}_k = \vec{F}_k .$$

А при действии всех сил одновременно:

$$ma = \sum F_k ,$$

$$\vec{a} = \sum \vec{a}_k .$$

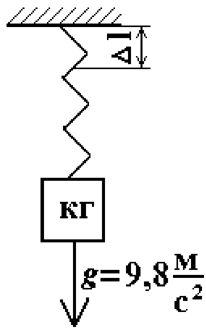
Закон независимости действия сил: при одновременном действии на тело нескольких сил, каждая из них сообщает телу такое же ускорение, которое она сообщает, действуя одна.

1.3. Единицы измерения

Рассмотрим две основные системы единиц:

1. Система СИ, за основу принимаются: масса [m] = 1 кг, длина [l] = 1м, время [t] = 1с. Сила определяется из основного закона $F = ma$ [F] = 1 кг м / с^2 = 1Н (1 Ньютон).

2. Система МКГСС за основу принимаются: длина, [l] = 1м, сила [F] = 1 кГс, время [t] = 1с. Единица силы 1кГс (или кГ - килограмм силы) определяется в виде удлинения пружины Δl, которое создает эталон массы 1кг (платино-иридиевый цилиндр диаметром и высотой равными 39 мм), находящийся под воздействием притяжения Земли с ускорением g = 9,8 м / с^2.



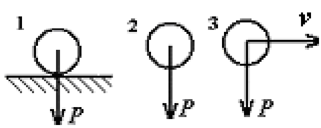
Тогда единица силы в этой системе будет связана с единицей в системе СИ посредством основного закона $F = ma$ так: 1кГс = 1 кг 9,8 м / с^2 = 9,8Н.

1.4. Виды сил

Сила тяжести. Действует на тело в покое (1), при падении (2), и в движении (3).

$P = mg$;

m – масса тела;
g = 9,8 м/с^2.

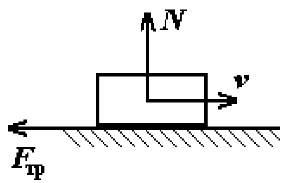


Сила трения скольжения

$F_{тр} = fN;$

$f = const$;

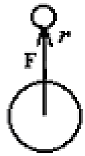
N – нормальная реакция.



Сила тяготения

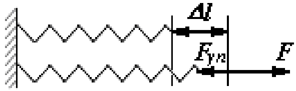
$$F = f_g \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

$$f_g = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$$ - гравитационная постоянная.



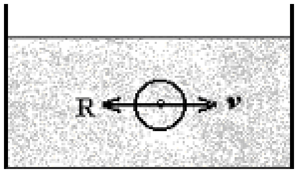
Сила упругости

$F_{уп} = -c\Delta l$, c – коэффициент жесткости пружины; $[c]$ = Н/м; Δl - удлинение пружины.



Сила вязкого трения

$R = kv$, k – коэффициент сопротивления. Для шара $R = 3\pi\mu dv$, μ - вязкость жидкости,
d – диаметр шара.
Действует в жидкости и при малой скорости – в воздухе.

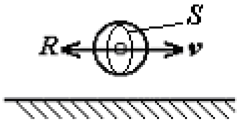


Сила аэродинамического сопротивления

$$R = C_x \frac{\rho v^2}{2} S .$$

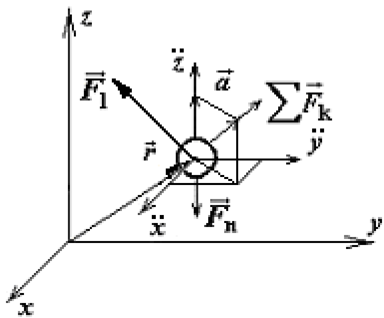
Для шара $C_x = 0{,}4$;

$S = \pi d^2 / 4$



1.5. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Основной закон механики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ представляет собой дифференциальное уравнение движения материальной точки, так как $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.



В кинематике мы рассматриваем три способа задания движения точки: векторный, координатный и в естественных координатах. В соответствии с этими способами получаем дифференциальные уравнения движения в трех формах:

1) $\vec{v} = \frac{dr}{dt}$; $\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}$; $m\frac{d^2 r}{dt^2} = \sum \vec{F}_k$ - в векторном виде;

2) Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

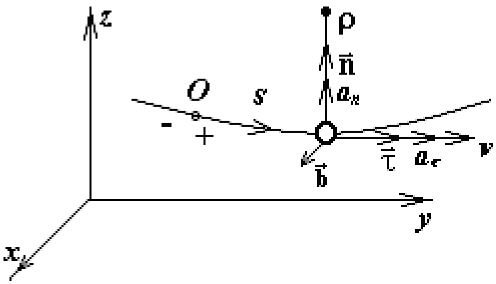
$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz} .$$

3) Дифференциальные уравнения движения точки в естественных координатах в соответствии с проекциями ускорения на тангенциальное, нормальное направление и бинормаль:

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$ где ρ - радиус кривизны траектории,

запишем уравнение движения:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum_k F_{kt}; \quad m\frac{v^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}; \quad F_{kb} = 0 .$$

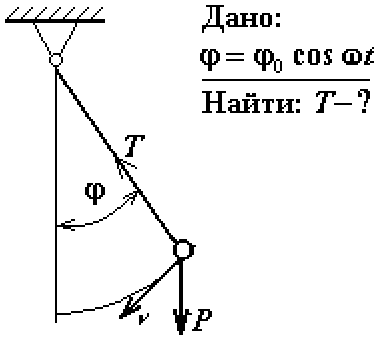


В результате решения дифференциальных уравнений движения получают закон движения:

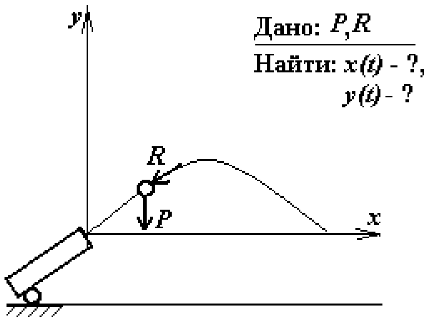
в векторном виде	$\vec{r} = \vec{r}(t)$;
в координатном виде	$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$;
в естественных координатах	$s = s(t)$.

1.6. Две задачи динамики точки

1. Известен закон движения точки – найти силы и реакции связей, действующие на нее.



2. Известны силы, действующие на точку – найти закон движения точки.
Например, задана сила тяжести P и сила аэродинамического сопротивления R.



Лекция 2

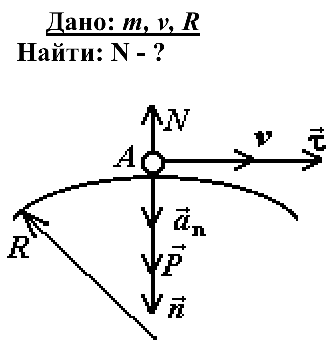
Тема 2: Дифференциальные уравнения движения точки

2.1. Пример первой задачи

Найти: какое давление на мост в т. A окажет автомобиль массой m, движущийся со скоростью v, если радиус моста равен R.

Решение:

Так как траектория известна, то используем дифференциальные уравнения движения точки в естественных координатах.



$$ma_n = \sum F_{kn}\ , \ a_n = \frac{v^2}{R}; \ \ \sum F_{kn} = P - N = mg - N\ ; \ \ m\frac{v^2}{R} = mg - N\ ;$$

откуда

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Теперь проанализируем результаты в двух случаях.

1. При $v = 0$, $N = mg$. 2. При $N = 0$, $v = \sqrt{gR}$.

План решения первой задачи:

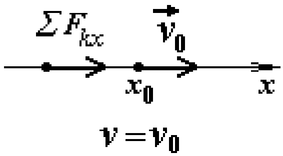
1. Схематически изобразить задачу и записать ее условия в сокращенном виде.
2. Приложить все активные силы и реакции связей.
3. Выбрать систему координат (декартовую, траекторную или другую).
4. Выбрать начало координат и провести координатные оси.

5. Записать основной закон механики в проекциях на оси координат.
6. В полученные дифференциальные уравнения подставить значения ускорений и проекций сил.
7. Решить уравнения относительно неизвестных.
8. Проанализировать результаты.

2.2. Основная задача динамики (вторая задача)

Она заключается в том, чтобы при заданных силах воздействия на материальную точку найти ее закон движения, т. е. $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Примеры решения второй задачи рассмотрим в случае прямолинейного и криволинейного движения.

Прямолинейное движение точки.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ; \qquad (2.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0\ ;\ \sum F_{kz} = 0\ ;\ \dot{v}_y = \dot{v}_z = 0\,.$$

Тогда $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$.

Начальные условия:

$$t = t_0\ ;\ x = x_0\ ;\ \dot{x} = \dot{v}_0\,. \qquad (2.2)$$

В результате решения дифференциального уравнения (2.1) получаем общее решение:

$$x = f(t, C_1, C_2). \qquad (2.3)$$

Постоянные интегрирования определяются при подстановке начальных значений (2.2) в общее решение (2.3):

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f(t_0, C_1, C_2) \\ \dot{x}_0 &= \dot{f}(t_0, C_1, C_2) \end{aligned}\right\} \text{ два уравнения для определения } C_1 \text{ и } C_2. \qquad (2.4)$$

Проинтегрируем уравнение (2.1) для разных случаев силы.

Постоянная сила: $\sum F_{kx} = Q = const$, при начальных условиях:

$$t = 0; \quad x = x_0; \quad \dot{x} = v_0 \qquad (2.5)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Q}{m}; \quad v = \int \frac{Q}{m}dt + C_1 = \frac{Q}{m}t + C_1\Big|_{t=0} = C_1 = v_0\,.$$

Последняя запись означает, что скорость $v = \dfrac{Q}{m}t + C_1$, при t=0 равняется C_1, а согласно начальным условиям (2.5), равна v_0. Поэтому получаем $C_1 = v_0$. После подстановки C_1 в v закон изменения скорости запишется так:

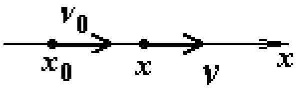
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{m}t + v_0\,. \qquad (2.6)$$

Интегрируя (2.6) еще раз, получаем закон движения точки в общем виде:

$$x = \frac{Qt^2}{2m} + v_0 t + C_2 \bigg|_{t=0} = C_2 = x_0\,,$$

откуда постоянная интегрирования $C_2 = x_0$. После подстановки C_2 получаем закон движения точки при действии на нее постоянной силы Q.

$$x = \frac{Q}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0\,.$$



<u>Сила зависит от времени:</u>

$F = kt$; при начальных условиях: $t = 0$; $x = x_0$; $v = v_0$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}t; \quad v = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 \bigg|_{t=0} = C_1 = v_0\,;$$

$$C_1 = v_0\,;$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{t^2}{2} + v_0; \quad x = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + v_0 t + C_2 \bigg|_{t=0} = C_2 = x_0\,.$$

$$C_2 = x_0\,;$$

$$x = \frac{k}{m}\frac{t^3}{6} + v_0 t + x_0\,. \qquad (2.7)$$

<u>Сила зависит от расстояния:</u>

$F = -kx$; при начальных условиях: $t = 0$; $x = x_0$; $v = 0$.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x\,;$$

После преобразования левой части:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}\,;$$

получаем:

$$\frac{dv^2}{dx} = -\frac{2k}{m}x\,.$$

После интегрирования запишем:

$$\int dv^2 = -\frac{2k}{m}\int x dx\ ; \qquad v^2 = -\frac{k}{m}x^2 + C_1\Big|_{\substack{t=0\\x=x_0}} = -\frac{k}{m}x_0 + C_1 = 0\ ,$$

откуда определяем постоянную интегрирования:

$$C_1 = \frac{2k}{m}x_0\ .$$

После подстановки определяем скорость.

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}x_0^2 - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2}\ .$$

Интегрируем скорость:

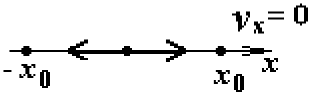
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2}\ ;\ \int\frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int\sqrt{\frac{k}{m}}dt\ ;$$

$$\arcsin\frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\ ;\ x = x_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\right)\Bigg|_{t=0} = x_0\sin C_2 = x_0\ ;$$

$$C_2 = \frac{\pi}{2}\ .$$

После подстановки C_2 получаем закон движения

$$x = x_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \qquad (2.8)$$



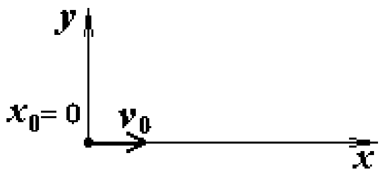
При $t = 0$, $x = x_0$, а при $t = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}}$, $x = -x_0$, т.е. точка совершает колебания от x_0 до $-x_0$. Выражение (2.8) является законом колебательного движения, период колебаний которого будет:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

<u>Сила зависит от скорости:</u>

$F = -\mu v_x$; при начальных условиях $t = 0$; $x = 0$; $v = v_0$.

$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}v$. Разделяем переменные $\int \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int dt$ и интегрируем.



$$\ln v = -\frac{\mu}{m}t + C_1\Big|_{t=0} = C_1 = \ln v_0;\ C_1 = \ln v_0;\ v = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t};$$

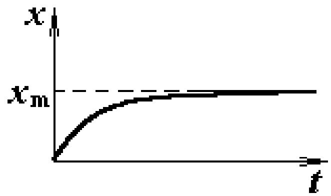
$$x = v_0\int e^{-\frac{\mu}{m}t}dt = -v_0\frac{m}{\mu}e^{-\frac{\mu}{m}t} + C_2\Big|_{t=0} = -v_0\frac{m}{\mu} + C_2 = 0,$$

откуда $C_2 = v_0\frac{m}{\mu}$;

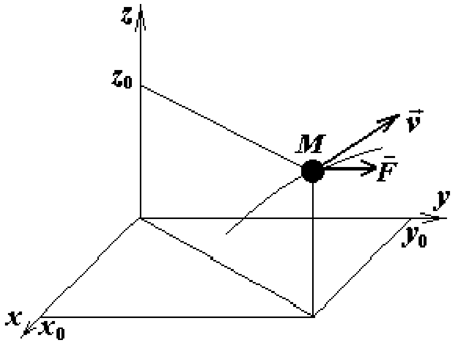
$$x = v_0\frac{m}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right). \qquad (2.9)$$

Выражение (2.9) представляет затухающее движение в вязкой жидкости.

При $t \to \infty$ $x_m = v_0\frac{m}{\mu}$.



<u>Криволинейное движение точки.</u>



Начальные условия:

$t = 0$; $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$;

$v_x = v_{x0}$; $v_y = v_{y0}$; $v_z = v_{z0}$.

Записываем дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m\ddot{x} = \sum F_x;$$
$$m\ddot{y} = \sum F_y; \qquad (2.10)$$
$$m\ddot{z} = \sum F_z.$$

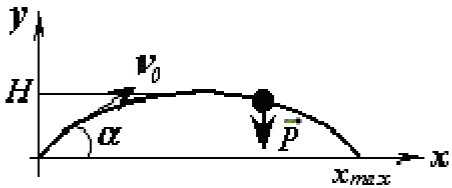
В общем случае силы могут являться функциями координат скорости и времени, например, $F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$. После интегрирования (2.10) получаем закон криволинейного движения точки

$$\left.\begin{aligned} x &= x(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \\ y &= y(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \\ z &= z(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, t) \end{aligned}\right\}.$$

Шесть постоянных интегрирования определяются начальными условиями из шести алгебраических уравнений:

$$x(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=x_0;\quad \dot{x}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=v_{x0};$$
$$y(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=y_0;\quad \dot{y}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=v_{y0};$$
$$z(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=z_0;\quad \dot{z}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,0)=v_{z0}.$$

<u>Пример</u>: движение точки, брошенной под углом α к горизонту.



Дано:
$t=0$ **;** $x=0$ **;** $y=0$ **;** $P=mg$ **;**
$v_{x0}=v_0\cos\alpha$ **;** $v_{y0}=v_0\sin\alpha$ **.**

x(t)-?; y(t)-?; y(x)-?

$$F_x=0;\quad F_y=-mg\ .$$

Запишем дифференциальное уравнение движения (2.10) в проекции на ось x:

$$\ddot{x}=0;\quad \dot{x}=C_1\big|_{t=0}=v_0\cos\alpha\ ;\ C_1=v_0\cos\alpha;\quad \dot{x}=v_0\cos\alpha\cdot t\ .$$

После повторного интегрирования получаем:

$$x=v_0\cos\alpha\ t+C_2\big|_{t=0}=C_2=0.$$

Откуда $C_2=0$ и $x=v_0\cos\alpha\ t$.

Уравнение (2.10) в проекции на ось у будет:

$$\ddot{y}=-g;\quad \dot{y}=-gt+C_3\big|_{t=0}=C_3=v_0\sin\alpha\ .$$

Откуда $C_3=v_0\sin\alpha$ и $\dot{y}=v_0\sin\alpha-gt$.

После интегрирования получаем:

$$y=-\frac{gt^2}{2}+v_0\sin\alpha t+C_4\big|_{t=0}=C_4=0\ .$$

$$C_4=0\ .$$

После подстановки C_4 получаем:

$$\left.\begin{aligned} y&=v_0\sin\alpha\ t-\frac{gt^2}{2};\\ x&=v_0\cos\alpha\ t.\end{aligned}\right\}\ \text{закон движения.}\qquad(2.11)$$

Исключим t :

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha};$$

$$y=\frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x-\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}=tg\alpha\cdot x-\frac{g}{2v_0\cos^2\alpha}x^2\ .$$

Уравнение траектории

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 . \qquad (2.12)$$

Проанализируем результаты. Из (2.12) видно, что $y = 0$ в двух случаях:

1) $y = 0; \quad x = 0$, т.е. точка находится в начале координат.

2) Точка приземляется в конце полета

$$x = \frac{2tg\alpha v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}; \quad x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Наибольшая дальность будет при: $2\alpha = 90^0$, т.е. при $\alpha = 45^0$.

Время движения определяем из (2.11):

$$t_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{v_0 \cos\alpha \cdot g} = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha .$$

Высота полета определяется при $v_y = 0; \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$.

Откуда $t_v = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, тогда высота полета из (2.11) будет:

$$H = \frac{v_0 \sin\alpha^2}{g} - \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

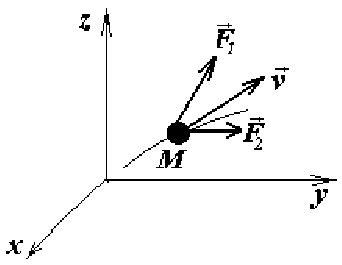
План решения основной задачи динамики.

1. Пункты 1 – 6 плана решения 1ой задачи остаются без изменения.
7. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.
8. Подставить начальные условия и определить константы интегрирования.
9. Найти искомые величины.
10. Проанализировать результаты.

Лекция 3

Тема 3: Динамические характеристики движения точки и общие теоремы динамики точки.

3.1. Теорема об изменении количества движения



Общие теоремы динамики получают в результате интегрирования основного закона динамики.

В ряде случаев они позволяют определить характеристики движения тела не прибегая к интегрированию уравнений его движения.

Основное уравнение динамики:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k \;; \tag{3.1}$$

с учетом того, что $m = const$, можем представить в виде:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k \;, \tag{3.2}$$

где $m\vec{v}$ - **количество движения материальной точки -** это векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость.

Размерность $[mv]$ = кгм \с = Н с.

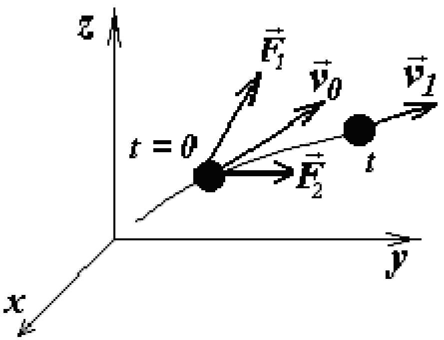
Уравнение (3.2) – **теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме**: производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.

Частный случай: $\sum \vec{F}_k = 0$, тогда из (3.2) получаем:

$m\vec{v} = const$ - **закон сохранения количества движения материальной точки**.

Преобразуем (3.2): $d(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_k dt$, а после интегрирования получаем:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \int_0^t \vec{F}_k dt \,. \tag{3.3}$$



Введем $d\vec{S} = \vec{F}dt$ - **элементарный импульс силы** – это векторная величина, равная произведению силы $\vec{F}$ на элементарный промежуток времени ее действия dt .

$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt$ - импульс силы за промежуток времени t_1. Размерность $[S]$ = Нс = кгм \с.

Тогда (3.3) запишется:

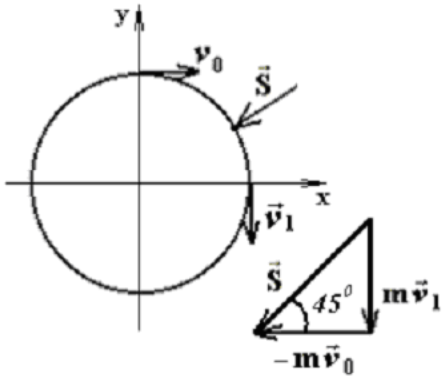
$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k \tag{3.4}$$

Выражение (3.4) - **теорема об изменении количества движения точки:** изменении количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

Запишем (3.4) в проекции на координатные оси:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \sum S_{kx} \;;\; m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 = \sum S_{ky} \;;\; m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 = \sum S_{kz} \;.$$

С помощью теоремы об изменении количества движения материальной точки решаются I и II задачи динамики.



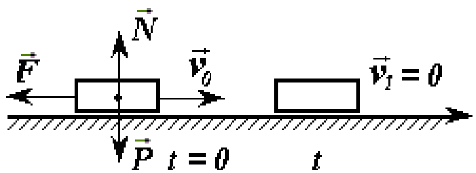
Пример 1. Определить импульс силы при равномерном движении частицы за время прохождения четверти окружности (первая задача динамики).

Запишем теорему об изменении количества движения:

$$\vec S = m\vec v_1 - m\vec v_0$$

откуда получаем:

$$S = \sqrt{m^2 v_0^2 + m^2 v_0^2} = m v_0 \sqrt{2}\,.$$



Пример 2. Определить время торможения груза m постоянной силой F, который в момент $t = 0$ имеет скорость v_0 (вторая задача динамики).

Дано: ***m*, *t* = 0,** $v = v_0$,

F = const **.**

Найти: t - ?

Решение:

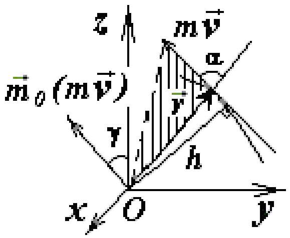
Запишем значение импульса и приравняем изменению количества движения:

$$S = \int_0^t (-F)dt = -Ft = m v_1 - m v_0\,,$$

откуда получаем: $t = \dfrac{m v_0}{F}$.

3.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Кроме вектора количества движения материальной точки рассматривают момент количества движения. В статике мы рассматривали момент силы относительно центра O как произведение величины силы F на ее плечо h, т.е. $m_0(\vec F) = Fh$, или в векторном виде: $\vec m_0(\vec F) = \vec r \times \vec F$. Так же как и для силы момент количества движения можно брать относительно центра и относительно оси.



Моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O* <u>называется векторное произведение радиус – вектора материальной точки на вектор ее количества движения</u>:

$$\vec{m}_0\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times m\vec{v}\ . \qquad (3.5)$$

Тогда модуль момента количества движения будет:

$$\left|\vec{m}_0\left(m\vec{v}\right)\right| = mvr \cdot \sin\alpha = mvh\ ,$$

где h - расстояние от центра O до вектора количества движения.

Размерность $\left[\vec{m}_0(m\vec{v})\right] = кг \cdot м^2 \ / \ с = Н \cdot м \cdot с$.

Рассматривается также момент количества движения относительно осей.

Моментом количества движения относительно оси *Z* <u>называется проекция</u> $\vec{m}_0\left(m\vec{v}\right)$ <u>на эту ось, т.е. величина</u> $m_z(m\vec{v}) = \left|\vec{m}_0(m\vec{v})\right|\cos\gamma$.

Продифференцируем векторное выражение для момента (3.5):

$$\frac{d\vec{m}_0\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dtt} = \vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt}\ ,$$

т.к. $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = 0$.

Умножим векторно основное уравнение динамики в виде (3.2) на $\vec{}$:

$$\vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_k\ .$$

Так как $\vec{r} \times \vec{F}_k = \vec{m}_0\left(\vec{F}_k\right)$ - момент силы относительно центра O, то отсюда получаем

$$\frac{d\vec{m}_0\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k)\ . \qquad (3.6)$$

Соотношение (3.6) – **теорема моментов относительно центра** – <u>производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-нибудь неподвижного центра равна сумме моментов действующих на точку сил относительно того же центра.</u>

В проекциях на оси (3.6) дает теорему моментов относительно осей, например оси z.

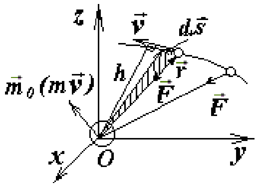
$$\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{v})] = \sum m_z(\vec{F})\ . \qquad (3.7)$$

Если $\sum m_z(\vec{F}) = 0$, то $m_z(m\vec{v}) = \text{const}$ **- закон сохранения момента количества движения материальной точки: если сумма моментов всех сил, действующих на материальную точку равна нулю, то момент количества движения материальной точки не изменяется.**

3.3. Движение под действием центральной силы.

Центральной называется сила, линия действия которой проходит через данный центр *O*. В этом случае $m_0(\vec{F}) = 0$. Тогда из (3.6) получаем:

$$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const}\,.$$



Вектор момента постоянен, т. е. движение под действием центральной силы происходит в плоскости, которая образована радиус-вектором и скоростью.

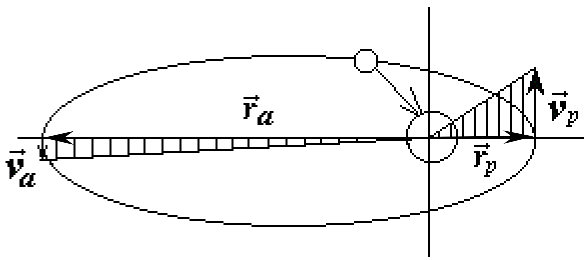
Запишем модуль момента количества движения: $|\,\vec{m}_0(m\vec{v})\,| = mvh = \text{const}$, откуда получаем $vh = \text{const}$.

Вектор момента количества движения представлен на рисунке. Площадь заштрихованного треугольника, образованного перемещением $d\vec{s}$ и радиусом-вектором $\vec{\ }$, равна $d\sigma = 0{,}5hds$

Тогда $vh = \dfrac{ds}{dt}h = \dfrac{hds}{dt} = \dfrac{2d\sigma}{dt} = \text{const}$, т. е

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const} \tag{3.8}$$

Величина $d\sigma$ является площадью сектора, а $d\sigma / dt$ – секториальная скорость.



Выражение (3.8) - **второй закон Кеплера**: при движении под действием центральной силы материальная точка движется по плоской кривой с постоянной секториальной скоростью. То есть радиус–вектор точки ометает равные площади за равные промежутки времени.

Например, при движении по эллиптической орбите под действием центральной силы секториальные скорости для апоцентрия r_a и перицентрия r_p будут равны:

$$v_a r_a = v_p r_p$$

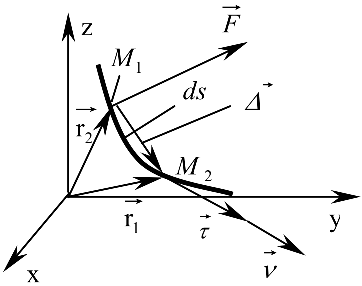
Откуда скорость тела в перицентрии будет:

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p}.$$

Лекция 4
3.4 Работа силы и мощность

Наряду с количеством движения mv и моментом количества движения mvr в механике введены динамические характеристики взаимодействия: работа и мощность. Если сила воздействия на материальную точку совпадает с направлением ее движения, то элементарной работой называют $dA = Fds$. В произвольном случае движения

$$dA = F_\tau ds = |\vec{F}|\cos\alpha ds .$$



Так как $ds = |d\vec{r}|$ и $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то

$$dA = \vec{F}d\vec{r}\text{ , или}$$

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной к материальной точке, называется скалярная величина A, равная произведению касательной составляющей силы на элементарное перемещение точки ds.

Размерность работы: $[A] = 1H \cdot м = Дж$ в системе СИ; $[A] = 1кГ \cdot м$ в системе МКГСС.

Запишем работу на конечном перемещении:

$$A_{M_0 M_1} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) . \qquad (3.9)$$

Перейдем к мощности. Это скорость выполнения работы:

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau v = \vec{F}\vec{v} .$$

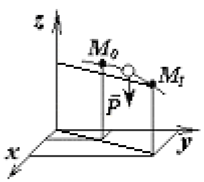
Мощностью называется величина, определяющая работу, совершенную силой в единицу времени и равна произведению касательной составляющей силы на скорость.

Размерность мощности: $[N] = 1\frac{Дж}{c} = 1Вт$ в системе СИ; $[N] = 1кГ \cdot м / c$ в системе МКГСС; в технической системе единиц размерность мощности и работы будет:

$$[N] = 1л.с. = 75кГм / c = 75 \cdot 9{,}8H / c = 736Вт; \qquad [A] = 1кВт \cdot ч = 3{,}6 \cdot 10^6\ Дж .$$

3.5 Примеры вычисления работы:

1. Работа силы тяжести.

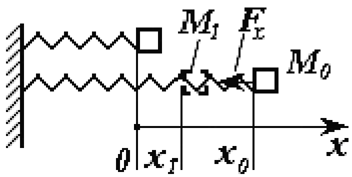


В пространственной системе координат силу тяжести можно записать так: $\vec{P} = -\vec{k}P + \vec{i}\,0 + \vec{j}\,0$.

Тогда работа: $A_{M_0M_1} = \int_{z_0}^{z_1}(-Pdz) = P(z_0 - z_1)$. Так как $(z_0 - z_1) = h$, *то* $A_{M_0M_1} = Ph$, а работа в обратном направлении от M_1 до M_0: $A_{M_1M_0} = -Ph$

Работа силы тяжести равна произведению силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.

Работа силы отрицательна, если конечная точка выше начальной, т. е. при подъеме.



Работа силы зависит только от координат начальной и конечной точек пути.

2. Работа силы упругости.

Сила деформации пружины $F_x = -cx$, где c - коэффициент жесткости пружины, а x – величина ее деформации. Тогда работа будет:

$$A_{M_0M_1} = \int_{x_0}^{x_1}(-cxdx) = -c\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2) \ .$$

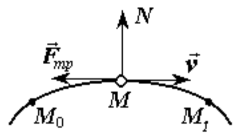
Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начальной и конечной деформации пружины.

Работа зависит только от координат начальной и конечной точек пути.

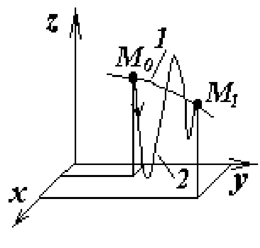
3. Работа силы трения.

$$F_{mp\tau} = F_{mp} = fN \ .$$

$$A_{M_0M_1} = -\int_{M_0}^{M_1} F_{mp}ds = -\int fNds = \Big/_{npu\ \_\ N\ =\ const} - F_{mp}s \ ,$$



где s длина пути M_0M_1. т. е. работа зависит от длины пути, а не от конечных точек.



В приведенных примерах работы сил тяжести и упругости существенно отличаются от работы силы трения. Так в первых двух случаях возможно представить сложное движение точки между положениями M_0 и M_1 , как показано линией 2. Работа по такому пути будет такая же как и по пути 1, потому что она зависит только от конечных точек пути. Работа сил трения в случае пути 2 значительно превышала бы работу по пути 1.

Потенциальные силы – <u>это такие силы, работа которых не зависит от вида пути, а определяется только положением начальной и конечной точек</u>.

Сила трения – не потенциальная сила, а силы **тяжести** и **упругости** – потенциальные.

3.6. Теорема об изменении кинетической энергии

Умножим правую и левую части основного закона динамики на v в проекции на оси координат:

$$d\frac{mv_x^2/2}{dt} = \sum F_{kx}v_x; \quad d\frac{mv_y^2/2}{dt} = \sum F_{ky}v_y; \quad d\frac{mv_z^2/2}{dt} = \sum F_{kz}v_z;$$

Затем сложим и окончательно получим:

$$\frac{d\frac{m}{2}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{dt} = \sum\left(F_{kx}v_x + F_{ky}v_y + F_{kz}v_z\right);$$

$$d\frac{mv^2/2}{dt} = \sum \vec{F}_k\vec{v}.$$

Вводится $T = \frac{mv^2}{2}$ - **кинетическая энергия материальной точки** – <u>это половина произведения массы точки на квадрат ее скорости.</u>

Размерность кинетической энергии такая же, как и работы $[T] = кг\cdot м/с^2 = Н\cdot м = Дж$ в системе СИ.

Кинетическая энергия является динамической характеристикой материальной точки. Так как $\sum\vec{F}_k\vec{v} = \sum\vec{F}_k\frac{d\vec{s}}{dt} = \sum\frac{A_k}{dt}$, то

$$d\frac{mv^2}{2} = \sum dA_k \tag{3.10}$$

Выражение (3.10) - это **теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде**.

Проинтегрируем (3.10) от начальной точки пути M_0 до конечной M_1, тогда

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{M_0M_1}. \tag{3.11}$$

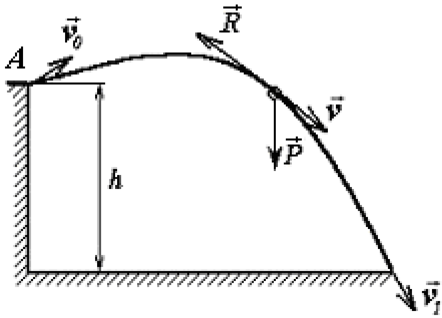
Это теорема об изменении кинетической энергии в конечной форме: <u>изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении</u>.

<u>Примеры.</u>

1. Тело массой m, брошенное со скоростью v_0 из точки A, находящейся на высоте h, имеет в т. падения скорость v_1. Чему равна работа силы сопротивления воздуха $\vec{R}$, которая действует на тело во время его движения?

Дано: m; v_0; h; v_1.

Найти: A(R) - ?



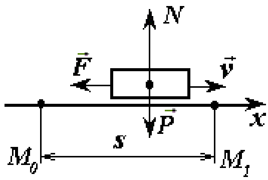
Запишем теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_k = A(\vec{R})+mgh$$

,

$$A(\vec{R})=\frac{m}{2}(v_1^2-v_0^2-2gh).$$

2. Груз массой m и скоростью v_0 движется под действием постоянной тормозящей силы F. Определить путь торможения груза.



Дано: m; v_0; F; $v_1=0$.

Найти: s – ?

Записав теорему об изменении кинетической энергии, получаем:

$$-\frac{mv_0^2}{2}=-\int Fds=-Fs\ .$$

Откуда находим путь торможения

$$s=\frac{mv_0^2}{2F}.$$

Некоторые итоги. Мы рассмотрели динамические характеристики материальной точки и характеристики воздействия на нее:

Характеристики МТ	Характеристики воздействия	теоремы об изменении
количество движения $m\vec{v}$	$\vec{F};\vec{S}$	количества движения
момент количества движения $\vec{r}\times m\vec{v}$	$m_0(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$	момента количества движения
кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$	$A=\int \vec{F}d\vec{r}$	кинетической энергии

Тема 4: Динамика системы и твердого тела

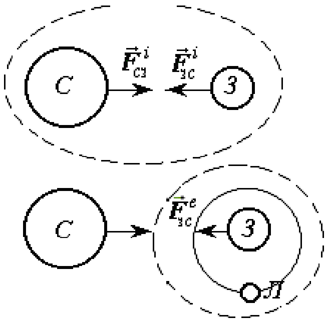
4.1. Механическая система и ее свойства

Мы закончили раздел, связанный с динамикой материальной точки. Рассмотрели дифференциальные уравнения движения точки и общие теоремы динамики. С помощью дифференциальных уравнений движения могут быть решены все задачи динамики точки. А общие теоремы позволяют более просто решить многие задачи динамики точки.

Теперь перейдем к рассмотрению динамики совокупности материальных точек.

Примеры механических систем:

Солнечная система – совокупность взаимодействующих между собой планет, спутников, астероидов, комет и т.п.; автомобиль – взаимодействующие между собой корпус, колеса, привод, двигатель.



Механическая система – это совокупность материальных точек, взаимодействие и движение которых рассматривается.

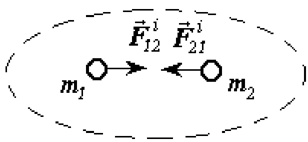
Рассматривают внешние F^e и внутренние F^i силы. Индексы происходят от латинских слов: *e* – exterior (внешний); *i* – interior (внутренний).

Внешними называются силы, с которыми воздействуют тела, в систему не входящие.

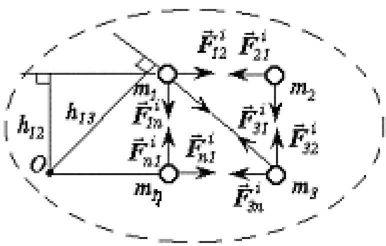
Внутренними силами называются силы взаимодействия тел системы друг с другом.

Подразделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от выбора системы. Например, при выделении системы Земля – Солнце сила воздействия Солнца на Землю $\vec{F}^i_{зс}$ будет внутренней. А при рассмотрении системы Земля – Луна сила воздействия Солнца на Землю $\vec{F}^e_{зс}$ будет внешней.

Рассмотрим свойства внутренних сил. При взаимодействии двух тел согласно первому закону динамики имеем $\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$. Поэтому сумма внутренних сил, действующих на систему из двух тел



$$\sum \vec{F}^i = \vec{F}^i_{12} + \vec{F}^i_{21} = -\vec{F}^i_{21} + \vec{F}^i_{21} = 0 .$$



Аналогично при взаимодействии *n* тел имеем:

$\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$; $\vec{F}^i_{13} = -\vec{F}^i_{31}$; $\vec{F}^i_{23} = -\vec{F}^i_{32} \ldots$ $\vec{F}^i_{(n-1)n} = -\vec{F}^i_{n(n-1)}$, что можем записать как

$$\vec{F}^i_{kj} = -\vec{F}^i_{jk} \qquad (4.1)$$

где $k = 1 \div n$; $j = 1 \div n$, и $k \neq j$.

Просуммируем все внутренние силы, действующие на тела системы:

$$\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}\vec{F}_{kj}^{i}=(\vec{F}_{12}^{i}+\vec{F}_{21}^{i})+(\vec{F}_{13}^{i}+\vec{F}_{31}^{i})+...+(\vec{F}_{(n-1)n}^{i}+\vec{F}_{n(n-1)}^{i}).$$

Откуда с учетом (4.1) получаем первое свойство внутренних сил:

$$\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}\vec{F}_{kj}^{i}=0. \tag{4.2}$$

1. Сумма всех внутренних сил системы равна нулю.

Из произвольного центра O проведем плечи h_{ij} к линиям действия сил $\vec{F}_{kj}^{i}$. Так как сумма алгебраических значений моментов относительно него попарно действующих сил запишется так:

$$m_0\left(\overline{F}_{kj}{}^{i}\right)+m_0\left(\overline{F}_{jk}{}^{i}\right)=\left(\overline{F}_{kj}{}^{i}-\overline{F}_{jk}{}^{i}\right)h=0,$$

то отсюда получаем второе свойство внутренних сил:

$$\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}\vec{m}_0(\vec{F}_{kj}^{i})=\vec{m}_0(\vec{F}_{12})+\vec{m}_0(\vec{F}_{21})+...+\vec{m}_0(\vec{F}_{n-1,n})+\vec{m}_0(\vec{F}_{n,n-1})=0.$$

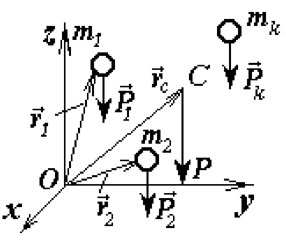
(4.3)

2. Сумма моментов всех внутренних сил системы относительно любого центра равна нулю.

Лекция 5

4.2. Центр масс системы

Масса системы равна сумме масс всех материальных точек системы: $M=\sum m_k$.



В статике было показано, что в однородном поле силы тяжести равнодействующая системы сил приложена в центре тяжести C, который определяется так:

$$x_c=\frac{\sum P_k x_k}{P};\quad y_c=\frac{\sum P_k y_k}{P};\quad z_c=\frac{\sum P_k z_k}{P},$$

где $P_k=m_k g$.

После подстановки сил тяжести получаем :

$$x_c=\frac{\sum m_k g x_k}{\sum m_k g}=\frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}=\frac{\sum m_k x_k}{M};\ y_c=\frac{\sum m_k y_k}{M};\ z_c=\frac{\sum m_k z_k}{M}. \tag{4.4}$$

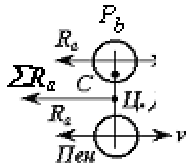
Как видим, координаты точки C зависят только от положения материальных точек и их масс.

Геометрическая точка C, координаты которой определяются этими формулами, называется **центром масс системы** или **ее центром инерции**. В векторном виде радиус вектор центра масс согласно 4.4 запишется:

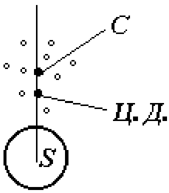
$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k \ . \qquad (4.5)$$

Если на точки системы действуют параллельные силы, то в центре масс может находиться центр давления параллельных сил. Если система будет находиться в однородном поле тяжести, то в центре масс будет расположен центр тяжести.

В общем случае центр действия сил и центр масс не совпадают.



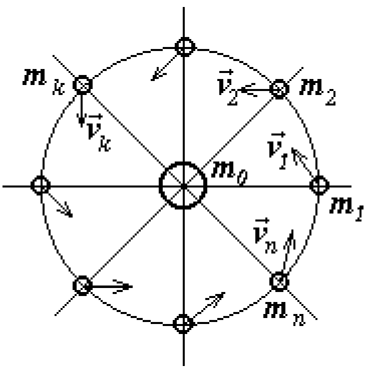
Пример 1. Если в воздухе движутся 2 шара одинакового диаметра: свинцовый (Pb) и пенопластовый (Пен), то центр давления (ц.д.) аэродинамических сил Ra будет расположен посредине между шарами, а центр масс (C) – вблизи свинцового шара.



Пример 2. В неоднородном поле сил тяготения звезды (S), центр давления сил $F = k\dfrac{m_i m_s}{r^2}$, действующих на систему тел, может быть смещен к звезде по сравнению с центром их масс C.

4.3. Дифференциальные уравнения движения системы

Пусть система состоит из n материальных точек. Все силы, действующие на каждую из точек, выразим в виде равнодействующей внутренних $F_k^i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} F_{kj}^i$ и внешних сил $F_k^e = \sum\limits_{l=1}^{l} F_{kl}^e$, где l – количество внешних тел, которые воздействуют на тела системы. Тогда уравнение движения точки m_k будет



$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e \ . \qquad (4.6)$$

Уравнение (4.6) справедливо для всех $k = 1 \ldots n$ точек материальной системы и в совокупности представляет систему n дифференциальных уравнений второго порядка в векторном виде или $3n$ в проекциях на оси координат. Если задать начальные положения точек и их скорости $\vec{r}_k(0) = \vec{r}_{k0}; \dot{\vec{r}}_k(0) = \dot{\vec{r}}_{k0}$, т.е. в проекциях на оси координат $6n$ начальных условий, то в результате интегрирования системы (4.6) получаем закон движения $\vec{r}_k(t)$ всех точек системы.

Однако, точное аналитическое интегрирование системы (4.6) можно выполнить лишь в немногих случаях. Например, совсем недавно (Е.А. Гребеников, 1998г.; И.И. Смульский, 1999г.) точно проинтегрировали дифференциальные уравнения движения осесимметрично расположенных на плоскости *n* тел, которые имеют массы $m_1=m_2=...=m_n$, $m_0 \neq m_n$ и взаимодействуют между собой с силами тяготения. В результате решения было установлено, что периферийные тела движутся по стабильным в пространстве траекториям, которые в зависимости от начальной скорости могут быть эллипсом, параболой или гиперболой. По-видимому, это единственные на сегодняшний день точные решения дифференциальных уравнений (4.6) механической системы.

Поэтому систему уравнений (4.6) решают численным методом. Однако, во многих случаях не возникает необходимость знания движения каждой точки. Требуется знать поведение системы в целом. С этой целью и используют общие теоремы динамики системы.

4.4. Теорема о движении центра масс

Просуммируем уравнения (4.6) по всем частицам:

$\sum m_k \dfrac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^i + \sum \vec{F}_k^e$, т. к. согласно (4.2) $\sum \vec{F}_k^i = 0$, то это уравнение запишется:

$$\frac{d^2 \sum m_k \vec{r}_k}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^e \qquad (4.7)$$

С учетом выражения (4.5) для центра масс получаем **теорему о движении центра масс**:

$$M \cdot \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^e \,. \qquad (4.8):$$

произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Запишем ее в декартовой системе координат

$$M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e; \quad M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e.$$

Рассмотрим следствия этой теоремы.

1. Сопоставляя (4.8) с уравнениями движения материальной точки

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k \,,$$

видим, что они идентичны.

Тогда теорема (4.8) будет звучать так: центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна всей массе системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Другими словами при рассмотрении материальной системы или тела в целом без учета его вращения, мы можем его рассматривать как материальную точку, расположенную в центре массы системы.

2. При изучении движения центра масс системы можно не рассматривать внутренние силы.

4.5. Закон сохранения движения центра масс

Если $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то из (4.8) следует:

$$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = 0; \quad \vec{a}_c = 0; \quad \vec{v}_c = \overrightarrow{\text{const}} \tag{4.9}$$

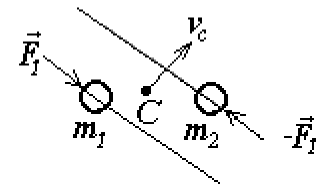
Положение (4.9) является **законом сохранения движения центра масс:** <u>если сумма всех внешних сил, действующих на систему, рана нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. прямолинейно и равномерно</u>.

Если в проекции на любую ось имеем $\sum F_{kx}^e = 0,$ то $\ddot{x}_c = 0,$ *т.е.* $v_{cx} = const$. Система движется с постоянной скоростью вдоль оси *x*, а в направлении других осей она может двигаться ускоренно.

Если $\vec{v}_c = 0$, то центр масс системы неподвижен.

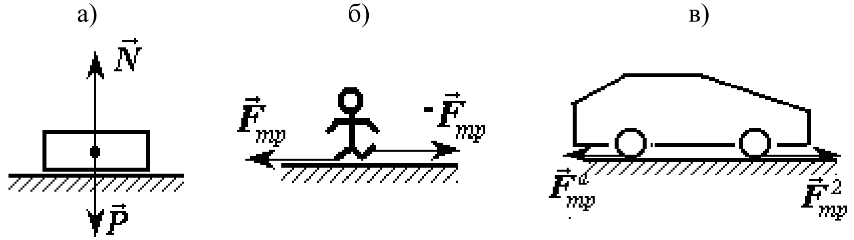
Примеры:

1. Движение центра масс Солнечной системы в пренебрежении притяжением звезд является неускоренным, несмотря на то, что тела системы взаимодействуют между собой.



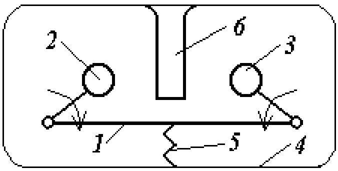
2. Если движение происходит под действием пары сил, то $\sum \vec{F}_k^e = 0;\ \vec{v}_c = \text{const}$, т.е. система движется без ускорения.

3. Движение по горизонтальной плоскости без трения, может происходить лишь неускоренно (а), т.е. $\vec{v}_c = \overrightarrow{const}$. Чтобы тело получило ускорение,



необходимо, чтобы вдоль плоскости на него действовала сила. Так человек (б) с помощью трения отталкивается от земли и приобретает ускорение, т.е. он движется под действием силы ($-F_{тр}$). Автомобиль (в) задними ведущими колесами воздействует на шоссе активной силой трения ($F^a_{тр}$), благодаря которой он движется. Передними ведомыми колесами он воздействует на шоссе пассивной силой трения ($F^2_{тр}$), которая препятствует его движению. Если трения не будет, то человек (на льду) и автомобиль (на скользкой дороге) не смогут двигаться.

4. Без взаимодействия с другими телами (т.е. при $\vec{F}^e_k = 0$) сдвинуть с места центр масс невозможно.



Об этом часто забывают и периодически появляются идеи о безопорном движении. Так в 60-ые годы 20-го века обсуждалась машина американца Дина.

На платформе 1 в противоположные стороны вращаются эксцентричные массы 2 и 3. Платформа прикреплена к корпусу 4 пружиной 5, поэтому она колеблется вверх – вниз и периодически ударяет по упору 6.

Приверженцы машины Дина предполагали, что суммарное воздействие вверх будет больше чем вниз и корпус начнет подниматься. Они намеривались, таким образом, создать двигатель безопорного движения.

В инерциоидах платформа колеблется в горизонтальном направлении, а воздействует она на корпус также как и в машине Дина в одном направлении с помощью пружины, а в другом без нее. Такие инерциоиды, снабженные колесами, могут двигаться под воздействием колеблющейся платформы. Это обусловлено тем, что силы трения колес с поверхностью зависят от их скорости и от силы нормального давления. Поэтому возникает разность действия колеблющейся платформы, которая приводит к движению инерциоида. В этом случае центр масс такого аппарата приобретает движение за счет взаимодействия с поверхностью с помощью трения. В предыдущем случае вертикальных колебаний платформы, машина Дина с другими телами не взаимодействует, поэтому она не приобретет направленного движения.

Эти примеры показывают, что в ряде случаев знание теоремы о движении центра масс позволяет ответить на вопрос, не углубляясь во все детали взаимодействия тел.

4.6. Теорема об изменении количества движения системы

Перепишем (4.8) в виде:

$$\frac{d\left(M\vec{v}_c\right)}{dt} = \vec{F}^e_k . \tag{4.10}$$

Обозначим $\vec{Q} = M\vec{v}_c$ - количество движения материальной системы.

Преобразуем Q с использованием (4.5):

$$\vec{Q} = M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum m_k \vec{v}_k,$$ отсюда получаем:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k \, . \tag{4.11}$$

Количеством движения механической системы называется векторная величина, равная геометрической сумме количества движения всех точек системы.

Перепишем (4.10) с учетом (4.11):

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e . \tag{4.12}$$

Это теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Проинтегрируем (4.12)

$$\int d\vec{Q} = \sum \int \vec{F}_k^{\,e} dt \text{, или}$$

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e \, , \tag{4.13}$$

где $\vec{S}_k^e = \int\limits_0^t \vec{F}_k^{\,e} dt$ - импульс действия силы за время t.

Выражение (4.13) – **теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме**: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.

Если $\sum \vec{F}_k^{\,e} = 0$, то из (4.12) получаем

$$\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}} \tag{4.14}$$

- **закон сохранения количества движения механической системы**: если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то количество движения системы остается неизменным по величине и направлению.

Теорема об изменении количества движения и закон сохранения количества движения справедлив в проекции на любую ось, например x:

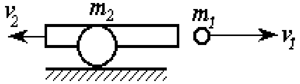
теорема $Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e$; закон: $Q_{1x} = \text{const}$.

Чтобы эффективно применить теорему об изменении количества движения $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e$ и закон сохранения количества движения $\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}$ необходимо систему выбрать так, чтобы неизвестные силы были внутренними.

Закон сохранения количества движения удобно применять, когда по изменению поступательной скорости одной части системы необходимо определить скорость другой. Например: при ударе двух тел.

Примеры:

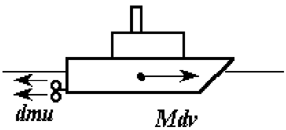
1. Отдача или откат пушки. До выстрела, как и после выстрела, общее количество движения $Q = 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2$. Откуда



скорость отката пушки $v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$.

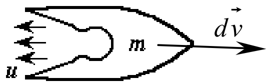
2. Работа гребного винта.

Внешние силы отсутствуют. Винт сообщает массе воды dm скорость u, а



лодка M приобретает скорость dv: $-udm + Mdv = 0$, откуда увеличение скорости лодки будет $dv = \frac{udm}{M}$.

3. Реактивный двигатель.



Ракета с реактивным двигателем выбрасывает

струю газов со скоростью u. Масса ракеты m уменьшается на величину (-dm), а скорость ракеты возрастает на величину dv, так как, то

$$dQ = udm + mdv = 0 \qquad dv = -u\frac{dm}{m}.$$

После интегрирования при условии, что в начале ракета имела массу m_0 и скорость v_0, получаем скорость ракеты $v = u\ln\frac{m_0}{m} + v_0$. Это формула К.Э. Циолковского и по ней определяется необходимый запас топлива для ракеты.

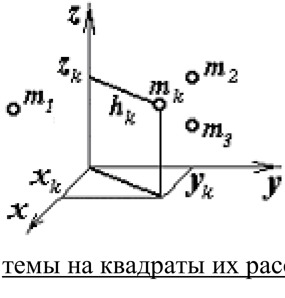
Лекция 6.

4.7. Моменты инерции.

4.7.1 Определение

Мы уже рассмотрели массу системы и ее центр масс. Положение центра масс определяется геометрическими свойствами системы.

Геометрическими свойствами системы определяется также величина



момента инерции. Это понятие вводится при рассмотрении вращательного движения. Если масса определяет динамику системы в поступательном движении, то вращательное движение системы, как потом увидим, определяется моментом инерции.

Моментом инерции системы относительно данной оси z называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек системы на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_k h_k^2 \ .$$

Размерность $[J_z] = 1 кг \cdot м^2$.

Так как $h_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$, то $J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$.

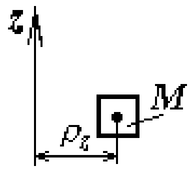
Аналогично

$$J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2); \ J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) .$$

Момент инерции можно также записать в виде:

$$J_z = M\rho_z{}^2 ,$$

где M - масса системы, ρ_z - радиус инерции.



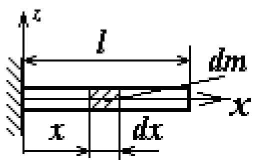
Радиус инерции – <u>расстояние от оси z , на котором должна быть расположена масса, равная массе всей системы, чтобы получить ее момент инерции. Другими словами, тело или система заменяется точечной массой, которая располагается на расстоянии ρ_z , от оси</u>.

Твердое тело – непрерывная система материальных точек с массами dm , поэтому суммирование заменяем интегрированием по всей массе M или объему V системы:

$$J_z = \int_M h^2 dm = \int_V \rho h^2 dV \text{ , где } \rho \text{ - плотность тела.}$$

4.7.2 Момент инерции однородных тел.

1.Тонкий однородный стержень.

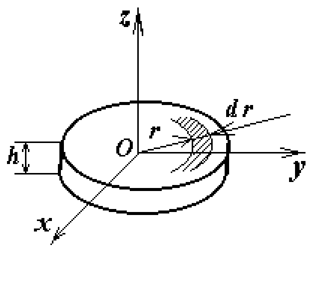


$dm = \rho_l dx$, где $\rho_l = \dfrac{M}{l}$ - погонная плотность.

После интегрирования получаем:

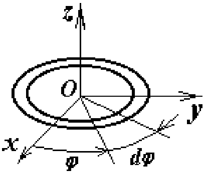
$$J_z = \int x^2 dm = \rho_l \int_0^l x^2 dx = \left. \frac{\rho_l x^3}{3} \right|_0^l = \rho_l \frac{l^3}{3} .$$

После подстановки массы стержня можно записать: $J_z = \dfrac{Ml^2}{3}$.



3. Круглый диск радиусом R. Масса диска $M = \pi R^2 \ h\rho$, а масса кольцевого элемента $dm = 2\rho\pi r dr h$. Интегрируя

$$J_z = \int r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi\rho h}{4} R^4 .$$



после подстановки массы получаем момент инерции диска: $J_z = \dfrac{MR^2}{2}$.

3. Тонкое кольцо. Элемент массы dm пропорционален длине $dl = R \cdot d\varphi$, а масса M – всей длине кольца $2\pi R$:

$$dm = \frac{MR}{2\pi R} d\varphi = \frac{M}{2\pi} d\varphi .$$

После интегрирования получаем:

$$J_z = \int_M R^2 dm = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = MR^2 .$$

4.7.3 Виды моментов инерции

Как мы уже рассматривали, момент инерции относительно оси можно записать так:

$J_z = \sum mr^2 = \sum m\left(x^2 + y^2\right)$, где x представляет расстояние масс от плоскости yz, а y – расстояние от плоскости xz.

Поэтому $J_{плyz} = \sum mx^2$; $J_{плxz} = \sum my^2$ - **моменты инерции относительно плоскости** yz и xz, а осевой момент инерции можно записать как:

$$J_z = J_{плyz} + J_{плxz} .$$

Полярный момент инерции определяется расстоянием R массы от полюса. Если полюс выбран в начале координат, то полярный момент будет:

$$H = \sum mr^2 = \sum m\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = J_{плyz} + J_{плxz} + J_{плxy} .$$

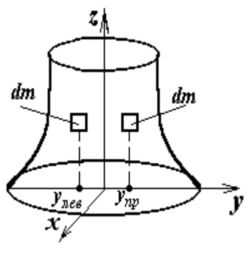
Центробежные моменты инерции определяются произведением координат

$$J_{xy} = \sum mxy ; \quad J_{xz} = \sum mxz ; \quad J_{yz} = \sum myz .$$

Так как во все моменты инерции, за исключением центробежных моментов, координаты входят в квадрате, то они положительны. Центробежный момент может быть отрицательным и нулевым.

Ось z, для которой центробежные моменты инерции $J_{xz} = J_{yz} = 0$, называется **главной осью инерции**. Рассмотрим осесимметричное тело.

Такое тело с осью z - осью симметрии, плоскостью xz можно разделить на два тела: левое и правое. Элементы этих тел отличаются только знаком координаты y, т.е. $y_{лев.} = -y_{пр}$. Тогда центробежный момент инерции будет:

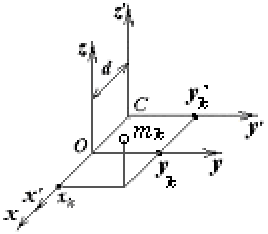


$$J_{yz} = \sum dmzy_{лев} + \sum dmzy_{пр} = -\sum dmzy_{пр} + \sum dmzy_{пр} = 0$$

Аналогично получим и для $J_{xz} = 0$.

Итак, если тело имеет ось симметрии, то эта ось является **главной осью инерции**.

4.7.4 Теорема Гюйгенса.



Так как момент инерции определяется квадратом расстояния до оси, то он зависит от положения оси. Рассмотрим, в каком соотношении находятся моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс *C*. Запишем моменты инерции относительно осей Oz и Oz':

$$J_{oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad J_{cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2), \quad \text{Так} \quad \text{как}$$

$$x_k' = d + x_k; \quad x_k = x_k' - d; \quad y_k' = y_k, \quad \text{то}$$

$$J_{0z} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) - 2\sum m_k (dx_k') + \sum m_k d^2 = J_{cz'} + Md^2 - 2d\sum m_k x_k'.$$

Однако последнее слагаемое пропорционально координате центра масс

$x_c' = \dfrac{\sum m_k x_k'}{M}$, которая равна нулю, так как центр масс находится в начале координат. Поэтому окончательно получаем

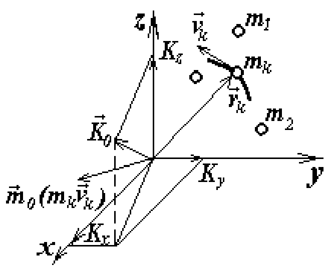
$$J_{0z} = J_{cz'} + Md^2. \tag{4.15}$$

Теорема Гюйгенса: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси ей параллельной и проходящей через центр масс тела, сложенный с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Лекция 7.

4.8. Теорема об изменении момента количества движения системы

4.8.1. Неподвижный центр.

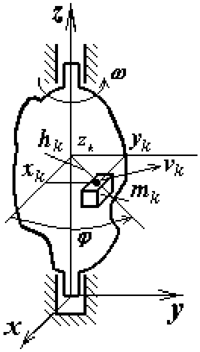


а) момент количества движения

Просуммируем моменты относительно центра О количества движения материальных точек, входящих в механическую систему.

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0 (m_k \vec{v}_k).$$

Главным моментом количества дви-



жения системы относительно данного центра <u>О, называется величина $\vec{K}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.</u>

Главный момент количества движения еще называют кинетическим моментом.

Проекции главного момента количества движения на оси:

$$K_x = \sum m_x(m_k \vec{v}_k);$$
$$K_y = \sum m_y(m_k \vec{v}_k);$$
$$K_z = \sum m_z(m_k \vec{v}_k).$$

Рассмотрим главный момент количества движения вращающегося тела. Скорость массы m_k будет: $v_k = \omega h_k$, а ее момент количества движения: $m_z(m_k v_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2$, тогда главный момент количества движения вращающегося тела: $K_z = \sum m_k \omega h_k^2 = \omega \sum m_k h_k^2$. Если введем момент инерции $J_z = \sum m_k h_k^2$, то момент количества движения вращающегося тела запишется:

$$K_z = \omega J_z. \tag{4.16}$$

Момент количества движения вращающегося тела относительно оси вращения <u>равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.</u>

Сопоставляя момент количества движения K с количеством движения Q видим, что момент инерции тел J является мерой инертности тел при вращении.

Рассмотрим момент количества движения относительно перпендикулярной оси x или y. Проекции скорости на эти оси

$v_{kx} = -v_k \sin\varphi = -\dfrac{v_k y}{h_k} = -\omega y$; $v_{ky} = \dfrac{v_k x_k}{h_k} = \omega x_k$, тогда кинетические моменты запишутся :

$$K_x = \sum m_x(m_k \vec{v}_k) = -\sum z_k \cdot m_k v_{ky} = -\omega \sum m_k z_k x_k = -J_{zx} \cdot \omega .$$

Аналогично $K_y = -J_{yz} \cdot \omega$. Таким образом, кинетические моменты вращающегося тела относительно осей, перпендикулярных оси вращения, зависят от центробежных моментов инерции J_{yz} и J_{xz}. Здесь следует обратить внимание на то, что при вращении тела его геометрические характеристики по направлениям осей x и y изменяются, поэтому вычисленные в момент $t=0$ J_{yz} и J_{xz} будут поворачиваться с угловой скоростью ω. В результате такое тело будет создавать пульсирующие нагрузки на оси.

б) Теорема

Пусть имеется система материальных точек, на которые действуют внутренние и внешние силы. Мы уже рассматриваем теорему моментов для материальной точки. Запишем ее для массы m_k, разделив силы на внешние и внутренние

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_0(m_k\vec{v}_k) = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i), \text{ где } k = 1...n.$$

Просуммируем для всех точек системы

$$\frac{d}{dt}\left(\sum\vec{m}_0(m_k\vec{v}_k)\right) = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Так как для внутренних сил $\sum\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) = 0$, то отсюда получим:

теорему моментов для механической системы:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e), \tag{4.17}$$

<u>производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра</u>.

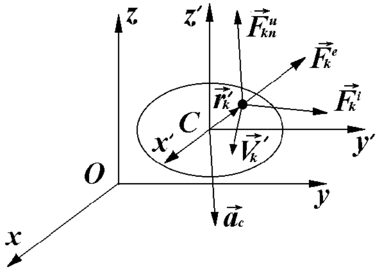
В проекциях на оси теорема моментов запишется так:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x\left(\vec{F}_k^e\right); \quad \frac{dK_Y}{dt} = \sum m_y\left(\vec{F}_k^e\right); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right).$$

Теорема моментов используется при изучении движения вращающегося тела, теории гироскопа и теории удара.

4.8.2. Теорема моментов относительно подвижного центра

Как мы уже рассматривали в кинематике, сложное движение тела можно разложить на поступательное движения вместе с полюсом и вращательное движение вокруг полюса.



Если за полюс выбрать центр масс C, то поступательное движение может быть изучено с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательное – с помощью теоремы моментов. Пусть, $Oxyz$ – неподвижная система координат, а $Cx'y'z'$ – поступательно движущаяся система координат с ускорением $\vec{a}_c$. Так как эта система неинерциальная, то к внешним $\vec{F}_k^e$ и внутренним силам $\vec{F}_k^i$ необходимо прибавить $\vec{F}_{kn}^u = -m_k\vec{a}_c$ – переносные силы инерции. Запишем для каждой точки теорему моментов относительно центра

C, просуммируем по всем точкам системы и приравняем нулю сумму моментов внутренних сил. Тогда получим:

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \sum \vec{m}_c\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum \vec{m}_c\left(\vec{F}_{k\,n}^{\,u}\right). \qquad (4.18)$$

Здесь главный момент количества движения:

$\vec{K}_c = \sum \vec{m}_c\left(m_k \vec{v}_k'\right)$, где $\vec{v}_k'$ - скорость МТ в системе $Cx'y'z'$.

А момент переносных сил инерции для одной точки:

$\vec{m}_c\left(\vec{F}_{k\,n}^{\,u}\right) = \vec{r}_k' \times \left(-m_k \vec{a}_c\right) = -m_k \vec{r}_k' \times \vec{a}_c$.

Если мы сложим его для всех точек системы

$$\sum \vec{m}_c\left(\vec{F}_{k\,n}^{\,u}\right) = -\left(\sum\left(m_k \vec{r}_k'\right) \times \vec{a}_c\right)\Big|_{M\vec{r}_c' = \sum m_k \vec{r}_k'} = -M\vec{r}_c' \times \vec{a}_c\Big|_{\vec{r}_c' = 0} = 0 ,$$

т.е. он равен нулю, так как центр масс системы С находится в начале координат. Тогда (4.18) запишется:

$$\frac{d\vec{K}_c}{dt} = \sum \vec{m}_c\left(\vec{F}_k^e\right) . \qquad (4.19)$$

Выражение (4.19) является **теоремой моментов относительно подвижного центра:** для осей, движущихся поступательно вместе с центром масс системы теорема моментов, сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.

4.8.3. Закон сохранения момента количества движения

Пусть $\sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) = 0$, тогда теорема (4.17) запишется $\vec{K}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$ - **закон сохранения момента количества движения**: если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет неизменен.

В случае вращающейся системы имеем:

$$K_z = J_z\omega = \text{const} \text{ , т.е. } \quad J_z\omega = \text{const} .$$

Рассмотрим два случая вращающейся системы.

1. Для твердого тела $J_z = \text{const}$, поэтому $\omega = const$, т.е. при равенстве нулю суммы моментов внешних сил тело вращается с постоянной скоростью.
2. Для изменяемой системы момент инерции не постоянен: при увеличении J_z уменьшается ω; при уменьшении J_z увеличивается ω.

Примеры:

На вращающемся стуле или вращающейся платформе Жуковского вначале человек раскручивается, расставив широко руки и ноги (большой момент инерции). Затем руки прижимаются к телу, и скорость вращения резко возрастает. Балерина или фигурист на коньках раскручиваются таким же образом.

При исполнении сальто акробат подпрыгивает вверх, сообщая небольшую вращательную скорость, затем в воздухе группируется, т.е. подтягивает колени к подбородку и охватывает их руками, скорость вращения его резко возрастает и к моменту приземления он успевает сделать один или даже два оборота.

Реактивный момент винта образуется по той же причине: суммарный момент количества движения винта и вертолета равен нулю. Поэтому при вращении винта возникает вращение вертолета. Чтобы его предотвратить ставят второй винт.

Закон сохранения момента количества движения позволяет по величине угловой скорости одной части системы определить угловую скорость другой части. При этом исключаются из рассмотрения внутренние силы.

4.9. Теорема об изменении кинетической энергии системы

4.9.1. Кинетическая энергия

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Сопоставим динамические характеристики материальной системы

1. $\vec{Q}$ - характеризует поступательное движение системы;

$\vec{K}_0$ - характеризует вращательное движение системы;

T - характеризует поступательное и вращательное движение системы.

2. $\vec{Q}$ и $\vec{K}_0$ - векторы;

T – скалярная величина

3. На $\vec{Q}$ и $\vec{K}_0$ внутренние силы не влияют, на T – влияет действие внутренних сил.

Примеры вычисления кинетической энергии в различных случаях.

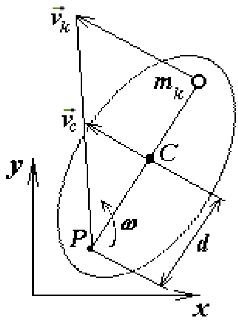
1. Поступательное движение со скоростью центра масс v_c. Тогда скорость каждой точки $v_к = v_c$ и кинетическая энергия системы будет

$$T_{пост} = \sum \frac{m_k v_c^2}{2} = \frac{M v_c^2}{2}. \tag{4.20}$$

2. Вращательное движение с угловой скоростью ω, направленной вдоль оси z. Так как, $v_k = h_к\omega$, то кинетическая энергия будет:

$$T_{вр} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}. \tag{4.21}$$

Из выражения (4.21) также видно, что момент инерции является мерой инертности тел при вращении.

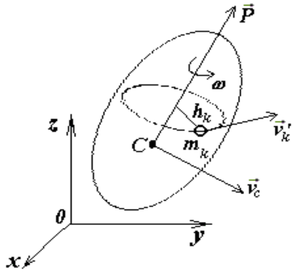


3. Плоскопараллельное движение.

В любой момент времени механическую систему можно представить вращающейся вокруг мгновенного центра скоростей P, с угловой скоростью ω (ось z перпендикулярна плоскости движения). Тогда кинетическая энергия $T_{пл} = \dfrac{J_{pz}\omega^2}{2}$, где J_{pz} – изменяющийся во времени момент инерции.

По теореме Гюйгенса $J_{pz}=Md^2+J_{cz}$, тогда

$$T_{пл} = M\frac{d^2\omega^2}{2} + \frac{J_{cz}\omega^2}{2} = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_{cz}\omega^2}{2}. \quad (4.22)$$



4. Общий случай движения.

В качестве полюса приведения берем центр масс C. Пусть CP – мгновенная ось вращения. Тогда скорость массы $m_к$ раскладывают на скорость поступательного движения совместно с полюсом v_c и скорость вращательного движения относительно полюса $v'_к=\omega h_к$, т.е. $\vec{v}_k = \vec{v}_c + \vec{v}'_к$. После возведения скорости в квадрат $v_k^2 = \vec{v}_k^2 = v_c^2 + v_k'^2 + 2\vec{v}_c \cdot \overrightarrow{v'_k}$ кинетическая энергия будет:

$$T = \sum\frac{mv_k^2}{2} = \sum\frac{mv_c^2}{2} + \sum\frac{mv_k'^2}{2} + \vec{v}_c\sum m_k\overrightarrow{v'_k} \quad .$$

Слагаемое $\sum m_k\overrightarrow{v'_k} = M\overrightarrow{v'_c} = 0$, т.к. точка C находится на оси вращения.

Слагаемое $\sum\dfrac{m_k v_k'^2}{2} = \sum\dfrac{m_k h_k^2\omega^2}{2} = \dfrac{J_{cp}\omega^2}{2}$. Тогда кинетическая энергия в общем случае движения будет:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_{cp}\omega^2}{2} \quad (4.23)$$

<u>**Кинетическая энергия тела** в общем случае движения равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.</u>

Лекция 8

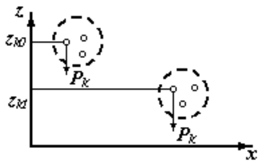
4.9.2. Работа

Случаи вычисления работы

Как и для материальной точки рассмотрим случаи вычисления работы для механической системы.

1. Работа силы тяжести.

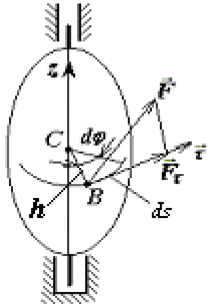
Работа при воздействии силы $P_к$ на одну массу $m_к$ будет $A_k = P_k\left(z_{k0} - z_{k1}\right)$. После суммирования по всем точкам системы получаем:



$$A = \sum A_k = \sum P_k z_{k0} - \sum P_k z_{k1}\Big|_{\sum P_k z_k = P z_c} = P\left(z_{c0} - z_{c1}\right),$$ т.е. работа равна произведению силы тяжести всей системы на вертикальное перемещение ее центра масс.

2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу:

$$dA = F_\tau ds\Big|_{ds = hd\varphi} = F_\tau h d\varphi .$$

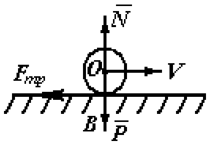


Но $F_\tau h = M_z = m_{cz}\left(\vec{F}\right)$ - вращающий момент, поэтому

$$A = \int_0^{\varphi 1} M_z d\varphi \Big|_{M_z = const} = M_z \varphi_1 \qquad (4.24)$$

Мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = M_z \dfrac{d\varphi}{dt} = M_z \omega$.

3. Работа сил трения, действующих на катящееся тело.



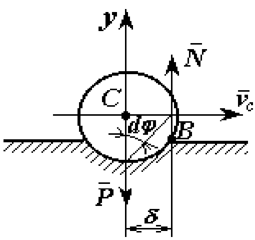
<u>Качение без скольжения по абсолютно </u>твердой поверхности.

Сила трения: $F_{тр} = fN$. Точка В – МЦС, поэтому $v_B = 0$; $ds_B = v_B dt = 0$. Тогда работа силы трения: $dA = F_{тр} ds_B = 0$.

<u>При качении без скольжения по абсолютно твердой поверхности работы сил трения равны нулю.</u>

<u>Качение по деформирующейся поверхности.</u>

Чтобы диск катился, необходимо ему повернуться вокруг точки В, в которой приложена нормальная реакция давления N на диск. Из условия равновесия на ось у имеем: $N=P$. Относительно т.В момент будет: $M_B = P\delta$, тогда работа: $dA = -M_B d\varphi = -N\delta d\varphi$.



Так как перемещение точки В будет $ds = d\varphi \cdot R$, то

$$dA = -N\delta \frac{ds}{R}.$$

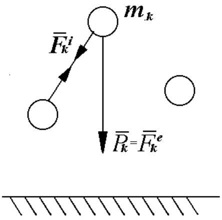
При $N = const$ получаем выражение для работы при качении по деформируемой поверхности:

$$A = -\frac{\delta}{R} N s_c . \qquad (4.25)$$

Величину $k = \dfrac{\delta}{R}$ называют безразмерным коэффициентом трения качения.

4.9.3. Теорема

Мы рассмотрели кинетическую энергию системы при разных видах ее движения и работу сил. Теперь перейдем к выводу теоремы. Если на мате-



риальные точки системы действуют внешние и внутренние силы F_k^e и F_k^i, то для каждой из них запишем теорему об изменении кинетической энергии $d\dfrac{m_k v_k^2}{2} = dA_k^e + dA_k^i$.

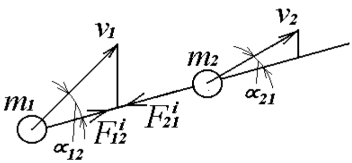
Просуммируем для всех точек системы и получим __**теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:**__

$$dT = d\sum\frac{m_k v_k^2}{2} = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i . \tag{4.26}$$

Интегрируя (4.25) от начального положения до конечного получаем:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i , \tag{4.27}$$

теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме – <u>изменение кинетической энергии системы на некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.</u>



Два случая.

__**1. Неизменяемая система. В случае системы из двух материальных точек работа внутренних сил:**__

$$\sum dA^i = F^i{}_{12} v_1 dt\cos\alpha_1 - F^i{}_{21} v_2 dt\cos\alpha_2 =$$
$$= F_{12}(v_1\cos\alpha_{12} - v_2\cos\alpha_{21})dt = 0$$

, так как в неизменяемой системе $v_1\cos\alpha_{12} = v_2\cos\alpha_{21}$ (Теорема о проекциях скоростей двух точек тела).

В случае системы из n материальных точек, работа внутренних сил запишется:

$$\sum dA_k^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} F_{jk}\left(v_j\cos\alpha_{jk} - v_k\cos\alpha_{kj}\right)dt = 0 .$$

Поэтому теоремы об изменении кинетической энергии (4.26) и (4.27) для неизменяемой системы будут:

$$dT = \sum dA_k^e;\quad T_1 - T_0 = \sum A_k^e . \tag{4.28}$$

2. Система с идеальными связями.

<u>*Связи называются идеальными, если сумма работ сил реакций связей равна нулю*</u>. Выделим силы активные $\vec{F}^a$ и реакции связей $\vec{F}^r$. Тогда теорема об изменении кинетической энергии: $dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r$. Для идеальных

связей: $\sum dA_k^r = 0$, поэтому для системы с идеальными связями теорема об изменении кинетической энергии будет:

$$dT = \sum dA_k^a . \qquad (4.29)$$

Примеры идеальных связей.

1. При движении по гладкой поверхности работа сил трения равна нулю.
2. При движении без скольжения работа сил трения скольжения равна нулю.
3. При качении без скольжения по абсолютно твердой поверхности работа сил сопротивления качению равна нулю.
4. При нерастяжимом стержне, соединяющем две материальные точки, работа сил упругости равна нулю.

<u>4.10. Потенциальные силы и силовая функция</u>

В общем случае пространственного движения тела от точки M_1 траектории до точки M_2 работа записывается :

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) . \qquad (4.30)$$

Этот интеграл можно вычислить, если известна траектория. В этом случае можно перейти к одной переменной, например, координате s. Если траектория задана в виде $y = f_1(x); \quad z = f_2(x)$, тогда переходим к одной переменной *x*, интегрируем значение работы и получаем $A = \int_{x_1}^{x_2} f_3(x) dx$.

Интеграл (4.30) в ряде случаев можно вычислить без знания траектории. Это возможно, если подынтегральное выражение будет дифференциалом некоторой функции:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x,y,z) . \qquad (4.31)$$

В этом случае $U(x,y,z)$ называется **силовой функцией, силы $\vec{F}$ - потенциальными силами, а координатное пространство, которым мы описываем положения взаимодействующих тел, называется потенциальным силовым полем.** Тогда после подстановки (4.31) в (4.30) получаем:

$$A_{M_1 M_1} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x,y,z) = U_2 - U_1 . \qquad (4.32)$$

Работа потенциальной силы <u>равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории не зависит.</u>

Если путь замкнутый, то начальная точка совпадает с конечной и работа потенциальной силы по замкнутому пути равна нулю:

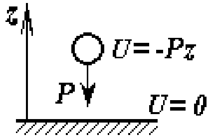
$$A_O = U_1 - U_1 = 0$$

Вычисление силовой функции.

Согласно (4.31) можно записать:

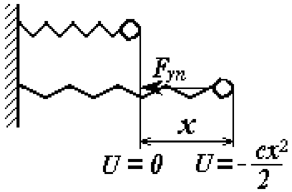
$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C ,$$

т. е. силовая функция может быть определена с точностью до произвольной постоянной. Поэтому в какой–то точке задают нулевое значение силовой функции. Так как потенциальными силами являются силы тяжести, упругости и тяготения, то вычислим для них значение силовой функции.



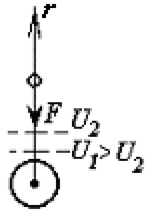
1. Силы тяжести: $P = \text{const}$.

$dA = -Pdz = dU$; $U = -Pz + C$. Выбираем нулевое значение силовой функции при $z = 0$: $U(0) = 0$, тогда $U = -Pz$.



2. Силы упругости $F_{yn} = -cx$. Выбираем $U(0) = 0$.

$$dA = -cxdx = dU; \quad U = -c\frac{x^2}{2} .$$



3. Силы тяготения: $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$.

$$dU = dA = -\frac{km_1m_2}{2}dr; \quad U = \frac{km_1m_2}{} + C .$$

Выбираем $U(\infty) = 0$; $C = 0$; $U = \frac{km_1m_2}{}$.

Так как ввели точку с нулевой силовой функцией, то силовая функция в любой точке пространства равняется работе при перемещении в эту точку из нулевой точки.

Определение сил по силовой функции.

Если $U(x,y,z)$ задано, то силы можно вычислить. Полный дифференциал функция можно представить как:

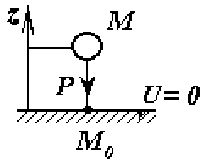
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial y}dz ,$$

тогда из определения (4.31) для dU получаем:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} . \qquad (4.33)$$

В векторном виде (4.33) будет: $\vec{F} = gradU$, т.е. сила является градиентом силовой функции.

4.11. Потенциальная энергия



При движении тела под действием потенциальной силы последней выполняется работа. Значит, можно условно сказать, что до начала движения тело в потенциальном поле сил имеет запас работы. Такой запас работы рассматривается по отношению к нулевой точке M_0, где U=0. Поэтому можно сказать, что в т. M по отношению к нулевой точке M_0 тело обладает запасом работы, который называют потенциальной энергией.

Потенциальной энергией материальной точки в положении *M*, называется скалярная величина *П*, равная работе потенциальной силы при перемещении точки из этого положения в нулевое.

$$\Pi_{(M)} = A_{(MO)} = \int_{(M)}^{(0)} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{0}^{(M)} F d\vec{r} = -U_{(M)} .$$

Итак,

$$\Pi(x,y,z) = -U(x,y,z): \tag{4.34}$$

Потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

Запишем работу при перемещении системы из положения M_1 в M_2:

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(0)} + \int_{(0)}^{(M_2)} = \int_{(M_1)}^{(0)} - \int_{(M_2)}^{(0)} = \Pi_{(M_1)} - \Pi_{(M_2)} . \tag{4.35}$$

Работа потенциальной силы при движении тела из начальной точки в конечную равна разности потенциальной энергии в этих точках.

Определим потенциальные энергии различных силовых полей из условия (4.34): $\Pi = -U$:

сила тяжести: $\Pi = Pz$;

сила упругости: $\Pi = \dfrac{cx^2}{2}$;

сила тяготения: $\Pi = -\dfrac{km_1m_2}{}$.

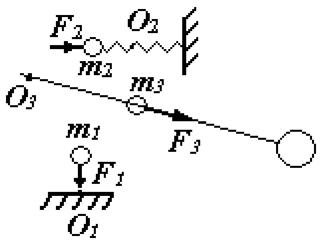
Мы рассмотрели потенциальные силы, силовую функцию и потенциальную энергию, которые введены для описания взаимодействий тел. Следует иметь в виду, когда мы говорим: "На тело действует силовое поле", то этими словами мы передаем смысл такого описания взаимодействий. В действительности, никакие поля на тело не действуют. Их нет в природе. На тела действуют только другие тела. Например, камень падает вниз в результате притяжения его Землей, а не в результате действия на него гравитационного поля или поля сил тяжести.

Лекция 9

4.12. Закон сохранения механической энергии

Для механической системы, находящейся под воздействием потенциальных сил разной природы, потенциальная энергия будет:

$$П = \sum A_{M_k O_k} \ ,$$



где $O_к$ – нулевые точки силовых полей. Потенциальная энергия будет зависеть от положения всех n точек. Связь ее с силовой функцией такая же.

$$П(x_1,y_1,z_1,\ldots x_n,y_n,z_n) = -U(x_1,y_1,z_1,\ldots x_n,y_n,z_n).$$

Если все силы (внутренние и внешние) потенциальны, то теорема об изменении кинетической энергии запишется:

$$T_2 - T_1 = \sum A_{k_{(M_1 M_2)}} = П_1 - П_2 . \qquad (4.36)$$

Перепишем (4.36) в виде:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2 = E = \text{const}, \qquad (4.37)$$

здесь $E = T + П$ называют полной механической энергией системы.

Выражение (4.37) – **закон сохранения механической энергии при движении под действием потенциальных сил:** сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной.

Для отдельной материальной точки применимы понятия силовой функции U и потенциальной энергии $П$. Поэтому для МТ справедлив также закон сохранения механической энергии.

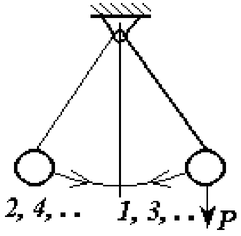
Если для системы E=const, то такая система называется **консервативной**.

Если механическая энергия системы уменьшается в процессе движения, то такая система называется **диссипативной**. (Диссипировать – означает рассеивать, растрачивать).

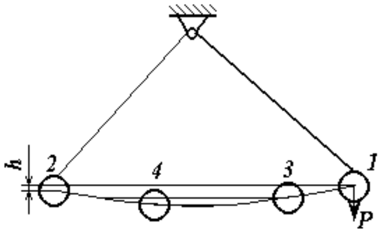
Для диссипативной системы закон сохранения механической энергии можно записать:

$T_1 + П_1 = T_2 + П_2 + A_d$, где $A_d>0$ - работа диссипативных сил при движении системы из первого состояния во второе.

Пример движения маятника в вакууме и во вязкой среде:



В вакууме крайние положения маятника справа (1, 3, ..) и слева (2, 4, ..) не будут изменяться

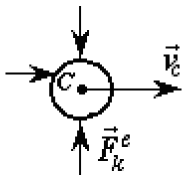


В вязкой среде крайние положения маятника с каждым взмахом будут уменьшаться. Величина работы сил вязкости за полпериода $A_d = mgh$

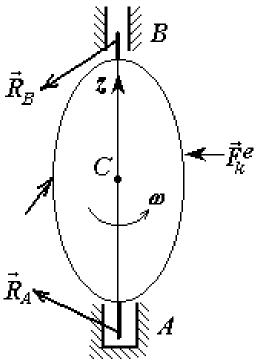
Тема 5. Динамика твердого тела

Твердое тело - <u>это система материальных точек, расстояние между которыми неизменно.</u> Конкретизируем законы и теоремы динамики механической системы применительно к твердому телу.

1. <u>Поступательное движение</u> (любая прямая в теле движется параллельно самой себе).



Согласно теореме об изменении количества движения механической системы $\dfrac{dM\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ - поступательное движение твердого тела можно определить через движение его центра масс:



$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum \vec{F}_k^e . \qquad (5.1)$$

Это дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела.

2. <u>Вращательное движение вокруг неподвижной оси</u>. Главный момент количества движения $K_z = J_z\omega$. Вращающий момент сил $M_z = \sum m_z(\vec{F}_k^e)$. Тогда теорема моментов $\dfrac{dK_z}{dt} = M_z$ запишется так: $J_z\dfrac{d\omega}{dt} = M_z$. Либо

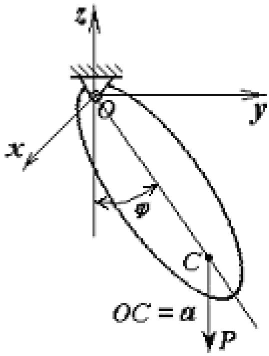
3.

$$J_z \varepsilon = M_z , \tag{5.2}$$

где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

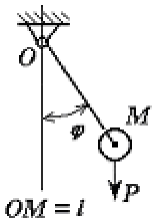
Это дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела: произведение момента инерции относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту.

Пример маятника.



Физическим маятником называется тело, которое может совершать колебания относительно неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на нерастяжимой, невесомой нити.



Рассмотрим вначале физический маятник.

Пусть при $t = 0, \omega = 0$, и $\varphi = \varphi_0$. Уравнение вращательного движения $J_x \varepsilon = M_x$. После подстановки $M_x = -Pa\sin\varphi$ получаем: $J_x \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa\,sin\varphi$. Либо $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin\varphi = 0$, где $k = \sqrt{\dfrac{Pa}{J_x}}$.

При $\varphi \langle\langle 1$ можно считать, что $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0 . \tag{5.3}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение: $\varphi = C_1\,sin\,kt + C_2\,cos\,kt$. Так как при t=0 $\varphi = \varphi_0$, то $C_2 = \varphi_0$.

Продифференцировав φ получаем $\omega = C_1 k\,cos\,kt - C_2 k\,sin\,kt$. Так как при $t = 0$, $\omega = 0$, то $C_1 = 0$. Окончательно получаем закон колебательного движения физического маятника:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt . \tag{5.4}$$

Период косинуса равен: $kt = 2\pi$. Откуда период колебаний физического маятника запишется $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_x}{Pa}}$.

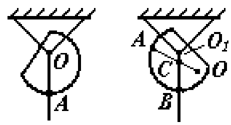
Для математического маятника $a = l$; $J_x = ml^2$; $P = mg$ и период колебаний:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{5.5}$$

<u>Измерение момента инерции тела.</u>

Подвешивая тело в качестве физического маятника можно измерить его период колебаний T и определить его момент инерции относительно точки подвеса О в виде $J_{ox} = \dfrac{PT^2 a}{4\pi^2}$. Подвешивая еще за одну точку O_1 на пересечении линий отвеса узнаем положение центра масс C и расстояние до него a.

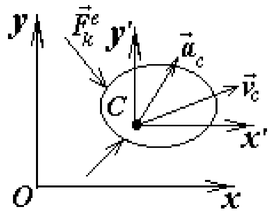
По теореме Гюйгенса $J_{ox} = J_{cx} + \dfrac{Pa^2}{g}$. Откуда определяем момент инерции относительно центра масс C в следующем виде:



$$J_{cx} = J_{ox} - \frac{Pa^2}{g} .$$

3. <u>Плоско-параллельное движение твердого тела</u> (все точки движутся в параллельных плоскостях). При плоско-параллельном движении твердого тела, как и в случае механической системы, разделим движение на поступательное движение центра масс С

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum \vec{F}_k^e \tag{5.6}$$



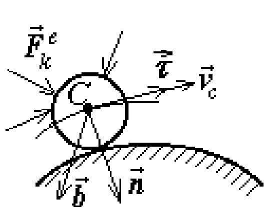
и вращательное движение вокруг центра масс

$$J_{cz}\varepsilon = M_{cz} , \tag{5.7}$$

что в проекциях на оси координат будет:

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e ; \; m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e ;$$

$$J_{cz}\ddot{\varphi} = M_z = \sum m_c(\vec{F}_k^e) . \tag{5.8}$$



Это дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

При несвободном движении с известной траекторией центра масс запишем эти уравнения в траекторной системе координат:

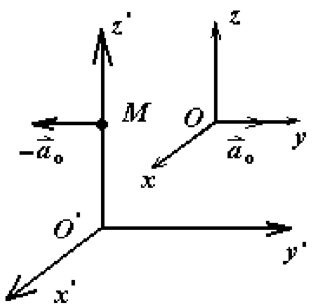
$$m\frac{dv_c}{dt}=\sum F^e_{k\tau}\ ;\ m\frac{v_c^2}{\rho_c}=\sum F^e_{kn}\ ;\ J_{bc}\ddot{\varphi}=\sum m_{bc}(\vec{F}^e_k)\ .$$

Это дифференциальные уравнения несвободного движения твердого тела.

Тема 6. Динамика относительного движения

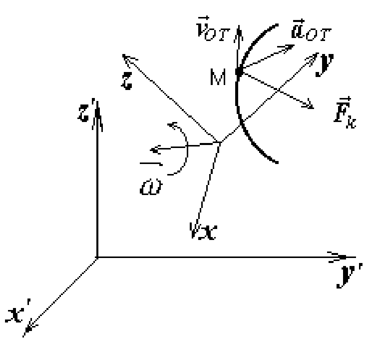
6.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Мы рассматривали движение и взаимодействие тел в инерциальной системы отсчета, т.е. в такой, которая покоится или движется без ускорения. В этой системе измеряются силы взаимодействия тел и рассматриваются их ускорения. Все три закона механики и общие теоремы динамики (за исключением теоремы моментов относительно подвижного центра) мы рассматривали только в инерциальной системе. Однако все реальные тела, с которыми мы связываем системы отсчета движутся ускоренно. И в ряде случаев это ускоренное движение необходимо учитывать.



Приведем пример. Пусть точка M покоится в инерциальной системе отсчета $x'y'z'$. А система xyz пусть движется поступательно с ускорением $\vec{a}_0$. Тогда точка M относительно системы xyz имеет ускорение $\vec{a}_M=-\vec{a}_0$, т.е. в отсутствии внешних сил точка M относительно неинерциальной системы xyz движется ускоренно. Таким образом, в неинерциальной системе отсчета законы динамики несправедливы.

Как эти законы можно скорректировать, чтобы ими можно было пользоваться в неинерциальной системе отсчета? Пусть в неинерциальной системе отсчета на точку M действуют тела силами $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...\vec{F}_n$. Если абсолютное ускорение точки в инерциальной системе $x'y'z'$ будет $\vec{a}_{аб}$, то основной закон динамики запишется:



$$m\vec{a}_{аб}=\sum\vec{F}_k \qquad (6.1)$$

Из кинематики известно, что абсолютное ускорение можно разложить на относительное (от), переносное (пер) и кориолисово (кор):

$$\vec{a}_{аб}=\vec{a}_{от}+\vec{a}_{пер}+\vec{a}_{кор} \qquad (6.2)$$

Тогда (6.1) можно записать:

$$m\vec{a}_{от} + m\vec{a}_{пер} + m\vec{a}_{кор} = \sum \vec{F}_k \qquad (6.3)$$

Введем обозначения $\vec{F}^{\,и}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$; $\vec{F}_{кор}{}^{и} = -m\vec{a}_{кор}$, т.е. произведение массы на соответствующее ускорение, взятое с обратным знаком, мы назвали переносной силой инерции ($\vec{F}^{и}_{пер}$) и кориолисовой силой инерции ($\vec{F}^{и}_{кор}$). Тогда из (6.3) получаем **основной закон динамики для относительного движения материальной точки**

$$m\vec{a}_{от} = \sum \vec{F}_к + \vec{F}^{и}_{пер} + \vec{F}^{и}_{кор} \,. \qquad (6.4)$$

Из сравнения (6.1) и (6.4) следует его формулировка:
<u>Все уравнения и теоремы механики для относительного движения материальной точки составляются также как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисовую силы инерции.</u>

Лекция 10

<u>6.2. Частные случаи движения неинерциальной системы</u>

<u>1. Поступательное движение системы *xyz:*</u> ω=0: $\overline{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}\boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{от}}]=0$; $\vec{F}^{и}_{кор} = 0$. Тогда (6.4) запишем для системы *xyz*

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}^{и}_{пер} \,. \qquad (6.5)$$

<u>2. Прямолинейное и равномерное поступательное движение системы *xyz*</u> : $\omega = 0$; $\overline{a}_{пер} = 0$; $\overline{a}_{кор} = 0$ $\vec{F}^{и}_{пер} = \vec{F}^{и}_{кор} = 0$ и уравнение (6.4) превращается в $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$.

Это основной закон динамики в инерциальной системе отсчета.
<u>3. Точка *M* покоится в системе *xyz*</u>

$\vec{\upsilon}_{от} = 0$, $\vec{a}_{от} = 0$, $\vec{a}_{кор} = 0$. Тогда (6.4) можем записать:

$$\sum F_k + F^{и}_{пер} = 0 \,. \qquad (6.6)$$

Это уравнение равновесия точки в неинерциальной системе отсчета: <u>для составления уравнения равновесия необходимо и силам взаимодействия точки с другими телами добавить переносную силу инерции.</u>

<u>4. Случай</u> $F_{кор} \neq 0$. Так как $\vec{F}_{кор} = -2m\left[\vec{\omega}x\vec{v}_{от}\right]$, то $\vec{F}_{кор} \perp \vec{v}_{от}$, т.е. Кориолисова сила перпендикулярна относительной скорости.

4.а. Поэтому в естественной системе координат в уравнение (6.4) на касательное направление τ не войдет сила Кориолиса:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} + F_{пер_\tau}{}^{и} \,. \qquad (6.7)$$

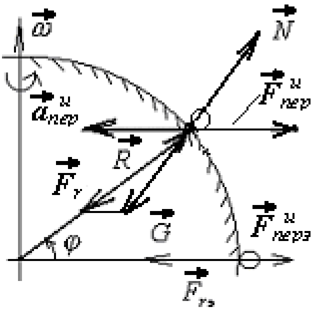
4.б. Работа кориолисовой силы равна нулю и теорема об изменении кинетической энергии запишется:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A\left(\vec{F}_k\right)+A\left(\vec{F}^{\,и}_{пер}\right)\ . \qquad (6.8)$$

<u>Примеры движения тел на вращающейся Земле, как в неинерциальной системе.</u>

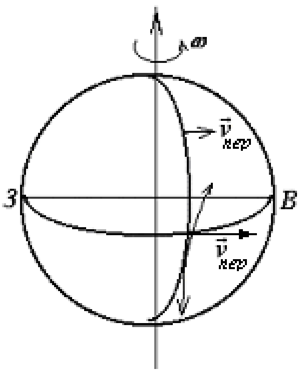
1. Сила тяжести.

В точке с широтой φ за счет вращения Земли переносное ускорение будет $a_{пер}=\omega^2 R\cos\varphi$, а переносная сила инерции запишется:



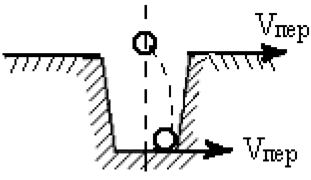
$F^{и}_{пер}=-ma_{пер}=-m\omega^2 R\cos\varphi$. Если гравитационная сила $F_r=k\dfrac{m_1m_2}{R^2}$, а N – реакция земной поверхности на тело, то условие равновесия (6.6) запишется: $\vec{N}+\vec{F}_r+\vec{F}^{и}_{пер}=0$. Отсюда $\vec{N}=-\vec{F}_r-\vec{F}_{пер}$, а так как сила тяжести $\vec{G}=-\vec{N}$, то она запишется:

$$\vec{G}=\vec{F}_r+\vec{F}^{и}_{пер}\ . \qquad (6.9)$$



Как видим, сила тяжести зависит от широты места и на экваторе ($\varphi=0$) сила тяжести наименьшая $G=F_r-m\omega^2 R$. Поэтому вращающаяся планета растягивается по экватору и сжимается у полюсов.

2. Движение атмосферы по земной поверхности. За счет нагрева в тропиках, воздушные массы поднимаются и движутся к полюсам. А так как $v_{пер}=\omega R\cos\varphi$ - переносная скорость, и на экваторе она наибольшая, то при движении воздушной массы к полюсу она отклоняется к востоку (В). Поэтому в средних широтах наблюдается западный (З) перенос явлений погоды.



3. Падение тел. Из-за уменьшения R переносная скорость $v_{пер}$ в начале падения больше, чем в конце. Поэтому тело, имея в верхней точке большую переносную скорость, чем в нижней, отклоняется от вертикали к востоку.

Тема 7: Принцип Даламбера

7.1. Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотренный для относительного движения прием замены произведения массы тела на ускорение силой инерции применяются также в случае движения в инерциальной системе отсчета. Пусть на МТ действуют активные силы $\vec{F}^a$ и реакции связей $\vec{N}$, тогда основное уравнение динамики будет:

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N} . \tag{7.1}$$

Если ввести силу инерции $\vec{F}^u = -m\vec{a}$, то (7.1) запишется

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{F}^u = 0 . \tag{7.2}$$

Это составляет **принцип Даламбера для МТ**: система активных сил, действующих на МТ, реакций связей и силы инерции является уравновешенной.

7.2. Принцип Даламбера для механической системы

Разделим силы, действующие на точки механической системы, на внешние $\vec{F}_k^e$ и внутренние $\vec{F}_k^i$.

Для k-той МТ можем записать уравнение движения

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i .$$

Введем силу инерции $\vec{F}_k^u = -m_k\vec{a}_k$, тогда

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u = 0 .$$

Просуммируем по всем точкам материальной системы:

$$\sum\vec{F}_k^e + \sum\vec{F}_k^i + \sum\vec{F}_k^u = 0 . \tag{7.3}$$

Возьмем момент сил (7.2), относительно центра O и просуммируем:

$$\sum \left[\vec{m}_0\left(\vec{F}_k{}^e\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k{}^i\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k{}^u\right)\right] \tag{7.4}$$

Введем главный вектор и главный момент сил инерции:

$$\vec{R}^u = \sum\vec{F}_k^u ; \quad \vec{m}_0^u = \sum\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^u\right) .$$

Так как сумма внутренних сил и их моментов равна нулю, то (7.3) и (7.4) получаем в виде:

$$\sum\vec{F}_k^e + \vec{R}^u = 0; \quad \sum\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{M}_0^u = 0. \tag{7.5}$$

Это принцип Даламбера для МС.

Так как в зависимости (7.2) и (7.5) входят только силы, то принцип Даламбера позволяет одинаково решать задачи статики и динамики, т.е. к динамическим задачам можно применять методы статики. Это часто упрощает решение задачи.

7.3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Главный вектор и главный момент сил инерции можно выразить через параметры МС. Из определения следует:

$$\vec{R}^u = -\sum m_k \vec{a}_k = -M\vec{a}_c \ .$$

Главный вектор сил инерции равен произведению массы системы на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Аналогично:

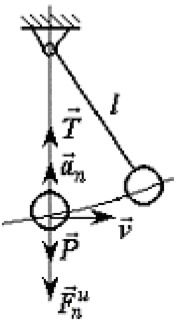
$$\vec{M}_o^u = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^u\right) = -\sum \vec{m}_0\left(m_k\vec{a}_k\right) = -\frac{d}{dt}\sum \vec{m}_0\left(m_k\vec{v}_k\right) = -\frac{d}{dt}\sum \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = -\frac{d\vec{K}_0}{dt}.$$

Главный момент сил инерции механической системы относительно некоторого центра *O* равен взятой с обратным знаком производной по времени от кинетического момента системы относительно того же центра.

Случаи движения:

1. Поступательное: a_c – одинаково для всех материальных точек:

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_c \ .$$



2. Вращение твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс: $M_{cz}^u = -J_{cz}\varepsilon$.

Методом Даламбера удобно пользоваться при нахождении реакций связей, когда движение системы известно.

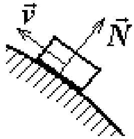
Пример. Найти силу силы натяжения нити маятника в нижнем положении. Так как нормальная сила инерции по величине: $F_n^u = \dfrac{mv^2}{l}$, то принцип Даламбера (7.5) запишется $T - P - F_n^u = 0$. Тогда натяжение нити T будет:

$$T = P + \frac{mv^2}{l} \ .$$

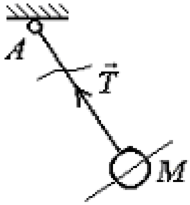
Тема 8. Принцип возможных перемещений

8.1. Классификация связей

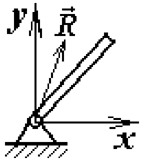
Все, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве, является **связью.**



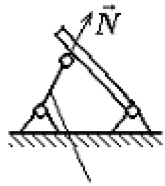
Гладкая поверхность



Нить



Цилиндрический шарнир



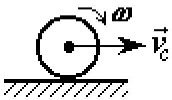
Невесомый стержень

Связями называются <u>любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют заданные силы.</u>

Стационарные связи – не изменяются со временем (тело на поверхности).

Нестационарные связи – изменяющиеся со временем (человек в движущемся автомобиле).

Геометрические –налагающие ограничения на положения тел (гладкая поверхность, шарнир…)



Кинематические или дифференциальные – налагающие ограничения на скорости точек системы.

Катящееся колесо. В этом случае угловая скорость связана со скоростью центра масс: $v_c = R\omega$.

Интегрируемая связь – если кинематическую зависимость между скоростями можно свести к зависимости между координатами:

$\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$ сводится к $x_c = R\varphi + x_0$

Неинтегрируемая кинематическая связь – в противном случае.

Связь "погоня ракеты за целью", при которой вектор скорости ракеты все время направлен на цель, является неинтегрируемой связью.

Голономные: геометрические и интегрируемые дифференциальные.

Неголономные: неинтегрируемые дифференциальные.

Механические системы материальных точек по виду связей подразделяются на голономные системы и неголономные

Удерживающие связи – ограничения сохраняются при любых положениях системы (цилиндрический шарнир, невесомый стержень)

Неудерживающая связь - система может освобождаться (гладкая поверхность, нить).

<u>8.2. Возможные перемещения системы</u>

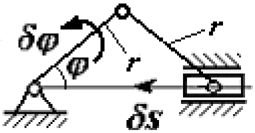
Рассмотрим два влияния связей. Первое влияние связей заключается в создании сил реакции N. Второе влияние связей, наложенных на МТ,- перемещение этой точки. Эти перемещения МТ **<u>называют возможными или виртуальными (δs)</u>**. Обозначение "δs – возможные" отличается от обозначения "ds – действительные перемещения".

Два условия для виртуального перемещения.

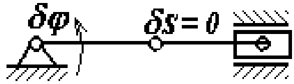
1) Перемещения должны быть элементарными, чтобы вид связи не изменился.

2) Вид связи не должен измениться, даже при элементарном перемещении.

а) Связь сохраняется только при $\delta\varphi << 1$. Например, так как $s = 2r\cos\varphi$, то $\delta s = -2r \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi$.



б) Связь не сохраняется даже при $\delta\varphi << 1$, так как при наличии $\delta\varphi$ перемещение $\delta s = 0$.

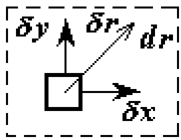


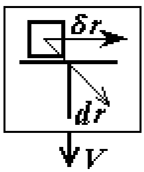
Возможным перемещением механической системы называется любая совокупность воображаемых элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

В векторном виде возможные перемещения запишутся так:

$$\delta\vec{r} = \vec{i}\,\delta x + \vec{j}\,\delta y + \vec{k}\,\delta z\ .$$

Для стационарных связей действительное перемещение $d\vec{r}$ совпадает с одним из возможных. Пример гладкой поверхности: δx, δy, δr– возможные перемещения, а δr совпало с действительным dr.

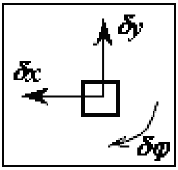




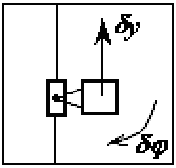
Для нестационарных связей dr не совпадает ни с одним виртуальным перемещением. Пример в движущемся лифте: действительное перемещение dr не совпало с δr.

Механическая система одновременно может иметь несколько возможных перемещений. Число независимых между собой возможных перемещений называется **числом степеней свободы** этой системы.

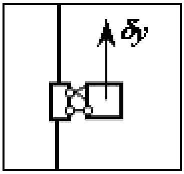
Точка на плоскости имеет $i = 2$ степени свободы, точка в пространстве – $i = 3$ степени свободы, тело в пространстве – три поступательных перемещения и три вращательных – всего 6 степеней свободы. У кривошепно-шатунного механизма одно независимое возможное перемещение δφ, т.е. одна степень свободы. **Чтобы определить число степеней свободы, нужно последовательно предотвращать возможные перемещения:**



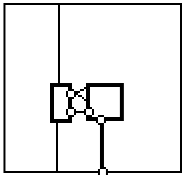
i = 3



i = 2



i = 1

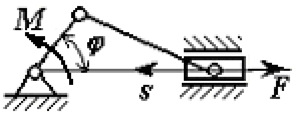


i = 0

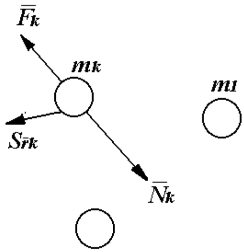
Лекция 11

8.3. Принцип возможных перемещений

В статике мы рассматривали равновесие неизменяемых механических систем, например, фермы. Однако в равновесии могут находится силы, воздействующие на изменяемую систему. Например, момент M и сила F могут быть уравновешены и кривошипно-шатунный механизм, несмотря на то, что он изменяем под действием этих сил, будет неподвижен. Рассмотрим метод решения таких задач.



Пусть на точки механической системы действуют активные силы и реакции связей, где $\vec{F}_k^a$ и $\vec{N}_k$ - главные векторы этих сил. Все силы стационарные. Пусть система находится в равновесии, тогда все ее точки покоятся относительно инерциальной системы отсчета. Тогда для каждой точки системы можем записать:



$$\vec{F}_k^a + \vec{N}_k = 0. \tag{8.1}$$

Если $\delta \vec{r}_k$ - возможное перемещение точки, то работа суммарной силы, действующей на точку $\delta A_k = \left(\vec{F}_k^a + \vec{N}_k\right)\delta \vec{r}_k = 0$, либо

$$\vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \vec{N}_k \delta \vec{r}_k = 0. \tag{8.2}$$

Обозначим: $\delta A_k{}^a = \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k$ - возможная работа активной силы; $\delta A_k^r = \vec{N}_k \delta \vec{r}_k$ - возможная работа реактивной силы, тогда (8.2) запишется:

$$\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0. \tag{8.3}$$

Просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0. \tag{8.4}$$

Мы уже рассматривали определение **идеальных связей**. Это такие связи, для которых сумма работ их реакций равна нулю. Поэтому сумма их элементарных работ на любом возможном перемещении равна нулю:

$\sum \delta A_k^r = 0$. Тогда из (8.4) получаем **принцип возможных перемещений** (ПВП):

$$\sum \delta A_k^a = \sum \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum F_k^a \delta s_k \cos \alpha_k = 0 . \tag{8.5}$$

<u>Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю</u>**.**

Из условия равновесия системы (8.1) мы получили принцип возможных перемещений (8.5). Поэтому он является необходимым условием для равновесия. Но достаточно ли его? Докажем от противного. При наличии (8.5) пусть система начала двигаться, ее точки получили скорости и она приобрела кинетическую энергию dT. Тогда по теореме об изменении кинетической энергии

$$dT = \sum dA_k^a = \sum \vec{F}_k^a d\vec{r}_k ,$$

где $d\vec{r}_k$ - действительное перемещение точки системы. Но перемещение $dr_к$ для стационарных связей совпадает с одним из возможных, т.е. $dr_к = \delta r_к$.
Тогда $dT = \sum \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum \delta A_k^a = 0$, т.е. механическая система будет неподвижной. Итак, ПВП (8.5) является необходимым и достаточным условием для равновесия системы.

Аналитическая форма ПВП (8.5) может быть записана так:

$$\sum \left(F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k \right) = 0 . \tag{8.6}$$

<u>8.4. Решение задач с помощью ПВП</u>

1. Вначале определяются степени свободы.
2. Останавливают поступательное или вращательное движение одного звена (выбирается одна степень свободы). Если механическая система становится неподвижной, то она имеет одну степень свободы.
3. Останавливают поступательное или вращательное движение второго звена. Если система становится неподвижной, то она имеет две степени свободы.
4. Останавливают поступательное ил вращательное движения третьего и т.д.

Решают задачу геометрическим или аналитическим методом.

<u>План решения геометрическим методом при одной степени свободы</u>.

1. Изобразить все активные силы
2. Сообщить на чертеже звеньям все возможные перемещения $\delta s_к$ и $\delta \varphi_к$.
3. Подсчитать элементарные работы

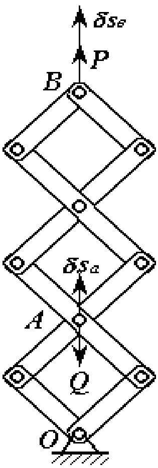
$$\delta A_k^a = F_k^a ds_k \cos \alpha_k ; \quad \delta A_k^a = M_k^a \delta \varphi_k .$$

4. Выразить графически все перемещения через одно.
5. Составить ПВП: $\sum \delta A_k^a = 0$.
6. Определить искомую величину.

При нескольких степенях свободы этот метод применяется столько раз, сколько имеется независимых перемещений, т.е. степеней свободы. При этом остальные степени свободы "замораживают".

2. <u>При аналитическом методе</u> расчета условие равновесия составляются в форме (8.6) по следующему плану:

1. Оси координат связывают с телом, которое при возможных перемещениях остается неподвижным.
2. Вычисляют проекции сил F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} и координаты их точек приложения x_k, y_k, z_k, выражая их через один параметр, например, координату x_1.



3. Дифференцируя x_k, y_k, z_k, находят возможные перемещения δ_{xk}, δ_{yk}, δ_{zk}.
4. Выражают их через одно перемещение, например, δ_{x1}.
5. Составляют ПВП в форме (8.6).
6. Определяют искомую величину.

С помощью ПВП можно также решать задачи с трением и находить реакции в неизменяемых механических системах. Сила трения или реакции в этом случае рассматривается как активная сила, а связь отбрасывается. При этом система превращается в изменяемую.

Примеры.

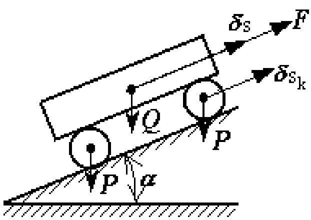
Задача 1. Найти силу Q рычажного подъемника.

Одна степень свободы: если предотвратить поворот в т.B, то механизм станет неподвижным. Так как $OB = 3 \cdot AO$, то после дифференцирования получаем

$\delta s_A = \dfrac{\delta s_B}{3}$. Записываем ПВП:

$\sum F_k^a \delta x_k = -Q\delta s_A + P\delta s_B = 0$ и определяем неизвестную силу:

$$Q = P\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = 3P .$$



Задача 2. Определить силу F, удерживающую бревно весом Q на катках весом P.

Одна степень свободы: если убрать поворот катка, то система будет неподвижной. Поворот катка $\delta\varphi = \dfrac{\delta s}{2R}$.

Перемещение катка $\delta s_k = d\varphi R = \dfrac{\delta s}{2}$. Составляем ПВП

$-Q\delta s\sin\alpha - 2P\delta s_k\sin\alpha + F\delta s = 0$ и определяем неизвестную силу $F = (Q+P)\sin\alpha$.

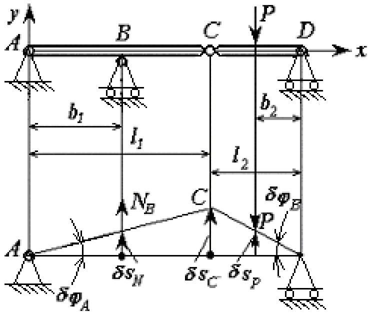
Задача 3. В предыдущих задачах мы рассматривали изменяемые механические системы. Из условия равновесия находили неизвестные активные силы. Сейчас рассмотрим равновесие неизменяемой механической системы: составной балки. По заданным активным силам найдем неизвестную реакцию.

Дано: $P,\ l_1,\ l_2,\ b_1, b_2$

Определить реакцию N_B - ?

Отбрасываем опору B и заменяем ее реакцией N_B. Система становится подвижной: AC может поворачиваться вокруг A, а т.C будет иметь перемещение δs_c.

Остальные перемещения будут:



$$\delta\varphi_a = \frac{\delta s_c}{l_1};$$

$$\delta\varphi_B = \frac{\delta s_c}{l_2}; \quad \delta s_N = \delta\varphi_\alpha b_1 = \frac{\delta s_c b_1}{l_1}$$

$$\delta s_P = \delta\varphi_B b_2 = \frac{\delta s_c b_2}{l_2}.$$

Составляем ПВП:

$$\sum \delta A = N_b \delta s_N - P\delta s_P = (N_b\frac{b_1}{l_1} - P\frac{b_2}{l_2})\delta s_c = 0$$

.

Определяем неизвестную реакцию:

$$N_B = P\frac{b_2 l_1}{l_2 b_1}.$$

Если потребуется найти реакции опор A или D, то необходимо последовательно отбрасывать каждую составляющую реакций и записывать ПВП. Например, в случае N_A это будет составляющие A_x и A_y. А в т.D будет одна составляющая в направлении оси y.

Лекция 12.

8.5. Общее уравнение динамики

С помощью принципа возможных перемещений решаются задачи для неподвижных систем или движущихся без ускорения, т.е. находящихся в равновесии. Если ввести силу инерции, то с помощью ПВП можно решать динамические задачи, т.е. движущиеся с ускорением.

Пусть на точки МС действуют активные $\vec{F}_k^a$ и реактивные $\vec{F}_k^r$ силы, и они движутся с ускорением $\vec{a}_k$. Если введем силу инерции $\vec{F}_k^u = -m_k \vec{a}_k$, то основное уравнение динамики точки запишется в виде условия равновесия:

$$\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^r + \vec{F}_k^u = 0. \tag{8.7}$$

Запишем работу этих сил на возможном перемещении точки $\delta\vec{r}_k$:

$$\delta A_k^a + \delta A_k^r + \delta A_k^u = 0. \tag{8.8}$$

Просуммировав по всем точкам системы получаем :

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^u = 0.$$

Так как для идеальных связей $\sum \delta A_k^r = 0$, то отсюда получаем общее уравнение динамики или **принцип Даламбера-Лагранжа**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0: \tag{8.9}$$

<u>При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.</u>

В аналитической форме общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \left[\left(F_{kx}^a + F_{kx}^u\right)\delta x_k + \left(F_{ky}^a + F_{ky}^u\right)\delta y_k + \left(F_{kz}^a + F_{kz}^u\right)\delta z_k \right] = 0. \tag{8.10}$$

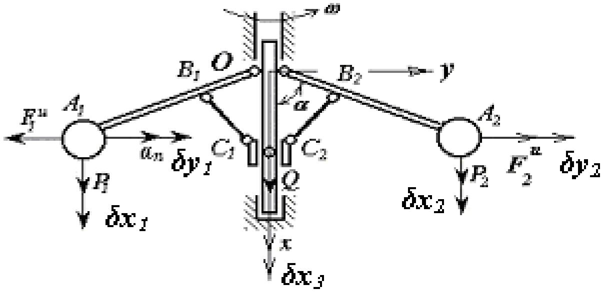
Если система состоит из нескольких твердых тел, то к действующим на каждое тело силам нужно приложить главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции относительного того центра, к которому приложен главный вектор сил инерции. Затем записать ПВП для активных сил и сил инерции.

Примеры:

Задача 1. Определить угол подъема α шаров центробежного регулятора, вес грузов которого $P_1 = P_2$ и вес муфты Q.

Дано:
$OA_1 = OA_2 = l$
$C_1B_1 = OB_1 = b$
$P_1 = P_2$
$Q;\ \omega$

Найти: α - ?



Регулятор подвижный, но при определенном соотношении сил наступает равновесие. При равномерном вращении регулятора с угловой скорость ω, шары движутся с нормальным ускорением.

$$a_n = \frac{v^2}{l\,sin\alpha} = \frac{\omega^2 l^2\,sin^2\alpha}{l\,sin\alpha} = \omega^2 l\,sin\alpha.$$

Силы инерции шаров по модулю будет:

$$F_1^u = F_2^u = \frac{P_1}{g}\omega^2 l\sin\alpha\,.$$

Приложим активные силы P_1, P_2, Q и силы инерции, направленные обратно ускорениям.

Запишем ПВП:

$$P_1\delta x_1 - F_1^u\delta y_1 + F_2^u\delta y_2 + P_2\delta x_2 + Q\delta x_3 = 0\,. \qquad (8.11)$$

Определим координаты:

$$x_1 = x_2 = l\cos\alpha\,; \quad -y_1 = y_2 = l\sin\alpha\,; \quad x_3 = 2b\cos\alpha\,.$$

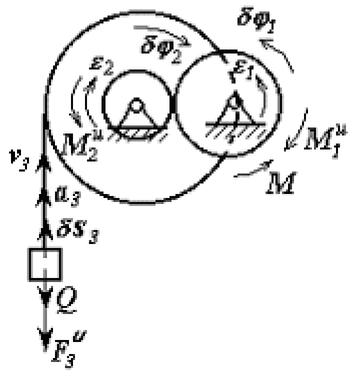
Продифференцировав, получим возможные перемещения:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -l\sin\alpha\delta\alpha\,; \quad -\delta y_1 = \delta y_2 = l\cos\alpha\delta\alpha\,; \quad \delta x_3 = -2b\sin\alpha\delta\alpha\,.$$

После подставим их в (8.11) находим:

$$cos\,\alpha = g\frac{P_1 l + Qb}{P_1\omega^2 l^2}\,.$$

Задача 2. Определить ускорение груза подъемника при постоянном вращающем моменте M.



Дано:

P_1, P_2, Q , M;

r_1, r_2, r – радиусы шкивов и барабана;

ρ_1, ρ_2, - радиусы инерции.

Найти: *a_3-?*

Моменты сил инерции шкива 1 и барабана со шкивом 2:

$$M_1^u = J_1\varepsilon_1 = \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1,$$

$$M_2^u = J_2\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2.$$

Знаки сил инерции и моментов сил инерции учитываем на рисунке.

Так как окружные скорости шкивов равны $r_1\omega_1 = r_2\omega_2;$ то $\omega_2 = \omega_1\frac{r_1}{r_2}$ и

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\frac{r_1}{r_2}\,.$$

А скорость груза и ускорение будут: $v_3 = r\omega_2 = \omega_1 r\frac{r_1}{r_2}$; $a_3 = \varepsilon_1 r\frac{r_1}{r_2}$.

Тогда момент инерции барабана $M_2^u = \frac{P_2\rho_2^2 r_1}{gr_2}\varepsilon_1$ и сила инерции груза

$$F_3^u = \frac{Q}{g}a_3 = \frac{Qrr_1}{gr_2}\varepsilon_1 .$$

Возможные перемещения пропорциональны скоростям тел:

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1\frac{r_1}{r_2}; \quad ds_3 = \delta\varphi_1\frac{rr_1}{r_2}.$$

Записываем ПВП:

$$-\left(Q + F_3^u\right)\delta s_3 - M_2^u\delta\varphi_2 + M\delta\varphi - \delta\varphi_1 M_1^u = 0 .$$

Подставляем возможные перемещения:

$$-\left(Q + \frac{Q}{g}\frac{rr_1}{r_2}\varepsilon_1\right)\frac{rr_1}{r_2}\delta\varphi_1 - \frac{P_2\rho_2^2 r_1}{gr_2}\varepsilon_1\frac{rr_1}{r_2}\delta\varphi_1 + \left(M - \frac{P_1\rho_1^2}{g}\varepsilon_1\right)\delta\varphi_1 = 0 .$$

Приравниваем нулю коэффициенты при $\delta\varphi_1$

$$-Q\frac{rr_1}{r_2} - \varepsilon_1\left(\frac{Qr^2r_1^2}{gr_2^2} + \frac{P_2\rho_2^2 rr_1^2}{gr_2^2} + \frac{P_1\rho_1^2}{g}\right) + M = 0 .$$

Отсюда находим угловое ускорение

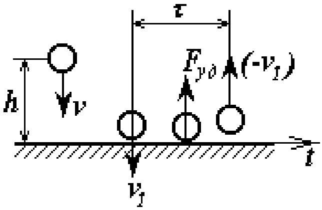
$$\varepsilon_1 = \frac{M - Qrr_1/r_2}{\frac{Q}{g}\frac{2rr_1^2}{r_2^2} + \frac{P_2\rho_2^2 r_1^2 r}{gr_2^2} + \frac{P_1\rho_1^2}{g}}$$

и ускорение груза

$$a_3 = \varepsilon\frac{rr_1}{r_2}.$$

Тема 9: Теория удара

9.1. Основное уравнение теории удара для МТ



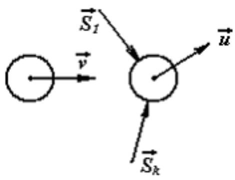
При обычном взаимодействии скорость тел изменяется непрерывно. При ударе скорость тела изменяется скачком. Пример: падение шарика на твердую поверхность с высоты h. У твердой поверхности шарик приобретает скорость $v_1 = v + \sqrt{2gh}$ и после воздействия ударной силы $F_{уд}$ его скорость изменится на обратную ($-v_1$).

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяется на конечную величину, называется

ударом. Силы, при действии которых происходит удар, называются **ударными силами.** Промежуток времени τ, в течении которого происходит удар, называется **временем удара.**

Так как в течение удара силы изменяются, то в теории удара в качестве меры рассматривают не ударные силы, а их ударные импульсы

$$\vec{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \vec{F}_{уд} dt = \vec{F}_{уд}^{ср} \tau. \tag{9.1}$$



Поскольку τ<<1, то импульсом неударных сил $\vec{S}_{ну} = \vec{F}_{ну}\tau << \vec{S}_{уд}$ можно пренебречь.

Пусть $\vec{v}$ - скорость материальной точки до удара, $\vec{u}$ - скорость тела после удара. Запишем теорему об изменении ее количества движения

$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \sum \vec{S}_k \tag{9.2}$$

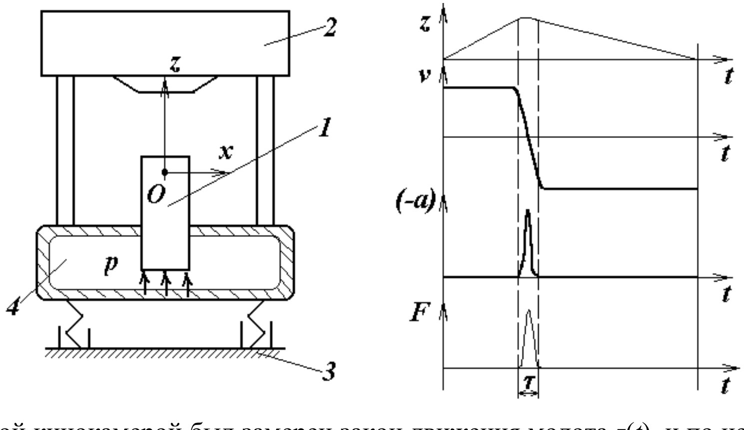
Это основное уравнение теории удара.

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов.

Некоторые итоги:

1. Действием неударных сил за время удара можно пренебречь.
2. Перемещением точек за время удара можно пренебречь: $x = v_{ср}\tau = 0$.
3. Изменение скорости точки за время удара определяется основным уравнением теории удара (9.2).

Пример уравновешенного молота. Академик Б.В. Войцеховский разработал пресс-молот «Сибирь», в котором молот 1 движется вверх, а наковальня 2 движется вниз навстречу молоту. Удар происходит между ними и не передается на фундамент 3. Молот и наковальня приводятся в движение давлением воздуха p до 300 атмосфер, который находился в ресивере 4. Высокоскоро-



стной кинокамерой был замерен закон движения молота $z(t)$, и по нему определена скорость $v = dz/dt$ и ударная сила $F = ma$. Величина силы, как видно из графика, достигала больших значений в течение малого времени τ.

Лекция 13
9.2. Общие теоремы теории удара для механической системы

Так как при ударе сила не может служить характеристикой воздействия, то для механической системы при ударных воздействиях рассматривают общие теоремы динамики, которые зависят от импульса силы.

1. Теорема об изменении количества движения системы.

Она справедлива и при ударе, но неударными силами можно пренебречь:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}^{e}_{удк}. \tag{9.3}$$

Изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

2. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы.

В случае удара моментами неударных сил можно пренебречь, поэтому теорема моментов так запишется в дифференциальном виде:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0\left(\vec{F}^{e}_{удк}\right)$$

и в интегральном виде

$$\vec{K}_{02} - \vec{K}_{01} = \sum \vec{m}_0\left(\vec{S}^{e}_{удк}\right), \tag{9.4}$$

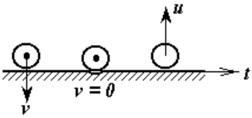
где $\vec{S}^{e}_{k} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{e}_{удк} dt$.

Изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-либо центра равно сумме моментов относительного того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.

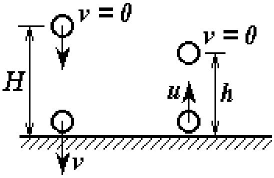
Внутренние ударные силы не изменяют главный вектор и главный момент количества движения.

9.3. Коэффициент восстановления при ударе

При падении шара на упругую поверхность со скоростью v его кинетическая энергия $T_1 = \dfrac{mv^2}{2}$ переходит в потенциальную энергию деформации шара и поверхности, которая после удара переходит в кинетическую энергию $T_2 = \dfrac{mu^2}{2}$. Разность энергии $\Delta E = T_1 - T_2$ расходуется на нагрев соударяющихся тел.



Величина $k = u/v$ называется **коэффициентом восстановления при ударе**: отношение модуля скорости тела после прямого его удара о неподвижную преграду к модулю скорости перед ударом. Коэффициент k определяется экспериментально.



При k = 1, т.е. u=v – абсолютно упругий удар. При k = 0, т.е. u = 0 – абсолютно неупругий удар.

Определение k по высоте подскока

По формуле Галилея запишем

$v = \sqrt{2gH}$ и $u = \sqrt{2gh}$, откуда

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}} \tag{9.5}$$

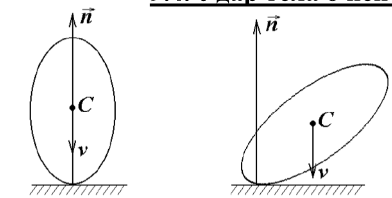
При $v \approx$ 3 м/с имеем следующие коэффициенты восстановления скорости при ударе:

$k \approx$ 0,5 - дерево по дереву;

$k \approx$ 0,56 - сталь по стали;

$k \approx$ 0,94 - стекло по стеклу.

9.4. Удар тела о неподвижную преграду (плиту)



Центральный *Нецентральный*

В зависимости от положения тела перед ударом рассматривают различные виды удара: центральный и нецентральный, прямой и косой.

Если нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела, то удар называется **центральным.**

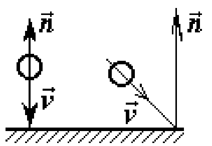
Прямой удар, если скорость v центра масс направлена по нормали к плите.

Запишем теорему об изменении импульсов при прямом центральном ударе: $\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{S}$.

В проекции на нормаль будем иметь $Q_1 - Q_0 = S$.

Так как $Q_0 = -mv$ и $Q_1 = mu$, то

$$m(u + v) = S .$$



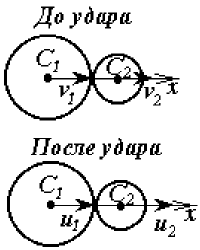
прямой *косой*

Поскольку $u = kv$, то отсюда ударный импульс при прямом центральном ударе будет

$$S = mv(1 + k).$$

Средняя сила удара $F_{cp} = \dfrac{S}{\tau}$, где время удара τ определяется экспериментально.

9.5. Прямой центральный удар двух тел



При прямом центральном ударе общая нормаль в точке касания проходит через центр масс тел и скорости направлены по этой нормали.

Для удара необходимо, чтобы:

1) $v_1 > v_2$;

2) $u_2 \geq u_1$

Коэффициент восстановления после удара будет:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}, \tag{9.6}$$

откуда получаем:

$$u_1 - u_2 = -k(v_1 - v_2).$$

Так как внешних сил нет, т.е. $\sum S_k^e = 0$, то основное уравнение удара (9.3) для механической системы запишется так: $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_0$, т.е.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 . \tag{9.7}$$

Запишем теоремы об изменении количества движения для каждого из тел:

$$m_1(u_1 - v_1) = S_1; \quad m_2(u_2 - v_2) = S_2 . \tag{9.8}$$

Преобразуем (9.7) в аналогичных (9.8) слагаемых:

$$m_1(u_1 - v_1) = -m_2(u_2 - v_2),$$

откуда получаем $S_1 = -S_2$, т.е. ударные импульсы равны и противоположно направлены.

Рассмотрим два случая:

1. <u>Абсолютно неупругий удар.</u>

Так как $k = 0$, из (9.6) и (9.7) получаем $u_2 = u_1 = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

Тогда величина импульсов согласно (9.8) запишется

$$S_2 = -S_1 = m_2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - m_2 v_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2).$$

<u>2. Абсолютно упругий удар</u>

Так как $k = 1$, то из (9.6) получаем $u_1 = u_2 - v_1 + v_2$.

Подставляем в (9.7)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_2 - m_1 v_1 + m_1 v_2 + m_2 u_2 .$$

Отсюда имеем:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1) + v_2 m_1 - v_2 m_1}{m_1 + m_2} = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{9.9}$$

Тогда

$$u_1 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) - v_1 + v_2 + v_1 - v_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{9.10}$$

Подставляя скорости в (9.8) получаем:

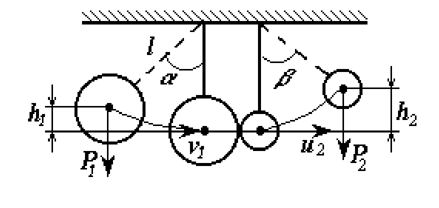
$$S_2 = -S_1 = m_2\left(v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) - v_2\right) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \qquad (9.11)$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе импульс в два раза больше импульса при абсолютно неупругом ударе:

$$S_2^{уп} = 2S_2^{нуп}. \qquad (9.12)$$

При $m_1 = m_2$ из (9.9) и (9.10) получаем: $u_2 = v_1$ и $u_1 = v_2$, т.е. тела одинаковой массы обмениваются скоростями. Если перед ударом второе тело покоится, то после удара оно будет двигаться, а первое остановится.

Пример. Определить коэффициент восстановления при ударе двух шаров, подвешенных на нитях.

Дано: m_1, m_2 l, α, β Найти: k-?	

Скорости до удара $\qquad v_1 = \sqrt{2gh_1};\quad v_2 = 0.$

Скорости после удара $\qquad u_1;\quad u_2 = \sqrt{2gh_2}.$

Внешних ударных сил нет, поэтому количество движения системы до удара и после удара одинаково, что выражено уравнением (9.7), которое в нашем случае будет: $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, откуда $u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1}u_2$.

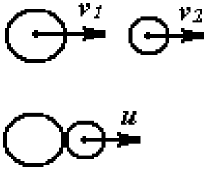
Тогда коэффициент восстановления при ударе запишется:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{u_2 - v_1 + \frac{m_2}{m_1}u_2}{v_1} = -1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 v_1}u_2 = -1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

А так как $h_1 = l - l\cos\alpha;\quad h_2 = l - l\cos\beta$, то коэффициент восстановления при ударе будет:

$$k = -1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\alpha}}. \qquad (9.13)$$

Лекция 14



9.6. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно

Рассмотрим потерю кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе. Запишем энергию до и после удара

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}; \quad T_1 = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2}.$$

Так как в этом случае скорость после удара равна: $u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$,

то кинетическая энергия после удара будет

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)\cdot(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{2} u \tag{9.13}$$

Тогда потерянная энергия при ударе запишется так:

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{2} u + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Откуда

$$T_0 - T_1 = \frac{m_1}{2}(v_1 - u)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - u)^2, \tag{9.14}$$

где $v_1 - u$ и $v_2 - u$ - потерянные при ударе скорости.

Это есть **теорема Карно** (1753-1823)**:** <u>кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую бы имела система, если все тела двигались бы с потерянными скоростями.</u>

При $k \neq 0$ можно показать, что потерянная энергия при ударе равна

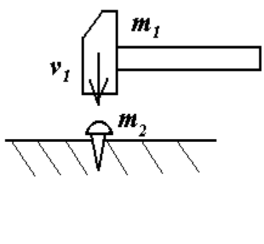
$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - u_2)^2}{2}\right].$$

<u>Пример</u>: Абсолютно неупругий удар по неподвижному телу. Так как $v_2 = 0$, то будем иметь следующее.

1. До удара $T_0 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$;

2. После удара

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}; \quad T_1 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0.$$



Тогда потерянная энергия будет:

$$T_0 - T_1 = T_0\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{v_1^2}{2}.$$

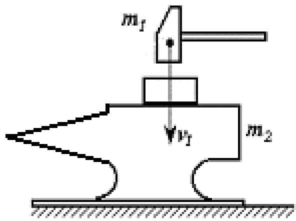
Это выражение следует также из (9.14) при $v_2 = 0$.

Рассмотрим два случая:

1-ый случай: $m_1 >> m_2$; $\quad T_0 - T_1 = \dfrac{m_2 v_1^2}{2} \approx 0$;

$T_1 = T_0$. Потери кинетической энергии почти не происходит. При ударе молотка по гвоздю вся кинетическая энергия молотка сообщается гвоздю. Она затем расходуется на работу по перемещению гвоздя.

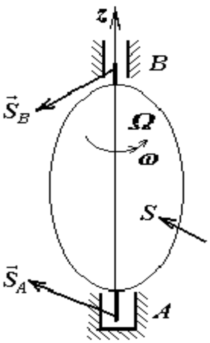
2-ой случай $m_2 >> m_1$:



$T_0 - T_1 \approx \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$. Так как $T_0 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$, то энергия после удара T_1*~0***.** То есть, при ударе молотком по детали на наковальне вся кинетическая энергия молотка расходуется на деформацию детали.

9.7.Удар по вращающемуся телу

9.7.1. Угловая скорость после удара



Пусть к вращающемуся телу приложен ударный импульс *S*. В проекциях на ось вращения *z* запишем теорему моментов

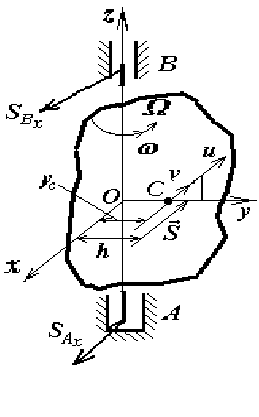
$$K_{z1} - K_{z0} = m_z\left(\vec{S}\right).$$

Если ω и Ω - угловые скорости вращения тела до и после удара, то после подстановки кинетических моментов получаем: $J_z\left(\Omega - \omega\right) = m_z\left(\vec{S}\right)$,

либо

$$\Omega = \omega + \frac{m_Z\left(\vec{S}\right)}{J_Z}. \qquad (9.15)$$

То есть, угловая скорость тела за время удара изменится на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.



9.7.2. Центр удара

Во время удара опоры *A* и *B* оси вращения испытывают ударные импульсы $\vec{S}_A$ и $\vec{S}_B$. В каком случае на ось не будет ударных реакций? По-видимому, когда весь импульс удара будет потрачен на угловое ускорение тела. Направим ось *x* параллельно ударному импульсу *S*. В опорах могут возникнуть ударные импульсы реакций S_{Ax} и S_{Bx}. Если *v* – скорость центра масс до удара, а *u* – после удара, то основное уравнение теории удара запишется: $Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}$, или

$$m(u - v) = S - S_{Ax} - S_{Bx} \; . \qquad (9.16)$$

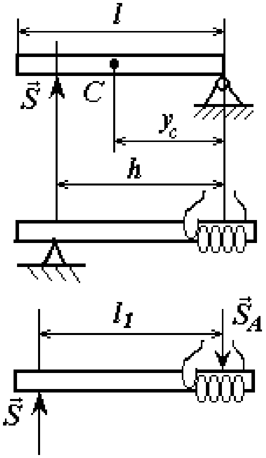
Если ω и Ω угловые скорости вращения тела до и после удара, то (9.16) будет:

$$my_C(\Omega - \omega) = S - S_{Ax} - S_{Bx} \, . \qquad (9.17)$$

Используем так же теорему моментов и разность угловых скоростей $(\Omega - \omega)$ в (9.17) выразим с помощью (9.15)

$$my_C \frac{Sh}{J_Z} = S - S_{Ax} - S_{Bx} \, . \qquad (9.18)$$

Если потребовать, чтобы ударные импульсы реакций $S_{Ax} = S_{Bx} = 0$, то отсюда получаем расстояние h, на котором должен быть приложен ударный импульс:



$$h = \frac{J_z}{my_c} \qquad (9.19)$$

Итак, удар нанесенный в точку, находящуюся на расстоянии h от оси вращения, не вызовет ударных реакций. Эта точка называется **центром удара.**

По-видимому, многие испытывали неприятные ощущения в руке при ударе палкой по неподвижной преграде. Говорят, что «сушит» руку. Применим формулу (9.19) для центра удара в этом случае. Момент инерции для однородного стержня равен $J = \frac{ml^2}{3}$, а его координаты центра масс $y_c = 0{,}5 \cdot l$. Подставляя эти параметры в (9.19), получаем: $h = \frac{ml^2}{3m \cdot 0{,}5 \cdot l} = \frac{2}{3} l$.

Итак, при нанесении удара однородной палкой на расстоянии $\frac{2}{3} l$ от руки, руку «сушить» не будет.

Если удар будет нанесен на расстоянии $h_1 = \frac{2}{3} l + \Delta l$, то согласно (9.18) имеем $my_c \frac{S(2l/3 + \Delta l)}{J_z} = S - S_A$. После подстановки значений y_c и J_z получаем $S_A = -\frac{3}{2} S \frac{\Delta l}{l}$, т.е. S_A будет направлен вверх, а приложенный к руке импульс направлен вниз. То есть при ударе ближе к концу палки «сушить» будет пальцы, а при ударе ближе к руке $(\Delta l < 0)$ «сушить» будет ладонь.

Лекция 15
Тема 10. Обзор основных теорем динамики и их связь со вторым законом механики

Все теоремы и законы динамики следуют из второго закона механики.

Материальная точка

Второй закон механики: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получит под действием силы, равно этой силе по модулю и направлению.

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad - \tag{10.1}$$

\- **Основной закон динамики**.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки:
в векторном виде:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F} \; ; \tag{10.2}$$

в координатном виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ax}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ay}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{az} \; , \tag{10.3}$$

в естественных координатах:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum_k F_{k\tau}; \quad m\frac{v^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}; \quad F_{kb} = 0 \, . \tag{10.4}$$

Закон движения:

в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$

в координатном виде $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$

в естественных координатах $s = s(t)$

Преобразуем (10.2)

$$d(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_k dt \, , \tag{10.5}$$

откуда $m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \int_0^t \vec{F}_k dt$. Введем импульс силы: $\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt$. Тогда **теорема об изменении количества движения** запишется

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k \; . \tag{3.4}$$

Здесь и далее оставлены номера формул, которые были присвоены им ранее.

При $\sum \vec{F}_k = 0$, $m\vec{v} = const$ - **закон сохранения количества движения материальной точки.**

Умножим основное уравнение динамики в виде (10.2) векторно на $\vec{}$.

$$\vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_k \ .$$

Так как $\vec{m}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$ - момент количества движения относительно центра O, то отсюда **теорема об изменении момента количества движения материальной точки** будет:

$$\frac{d\vec{m}_0(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k) \ . \qquad (3.6)$$

Умножим правую и левую части основного закона динамики в виде (10.3) на v в проекции на оси координат:

$$\frac{d(mv_x^2/2)}{dt} = \sum F_{kx}v_x; \quad \frac{d(mv_y^2/2)}{dt} = \sum F_{ky}v_y; \quad \frac{d(mv_z^2/2)}{dt} = \sum F_{kz}v_z;$$

Затем сложим умноженные правую и левую части на dt и окончательно получим:

$$d\frac{mv^2}{2} = \sum dA_k \ . \qquad (3.10)$$

Проинтегрируем (3.10) от начальной точки пути M_0 до конечной M_1, тогда получим **теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме**:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{M_0M_1} \ . \qquad (3.11)$$

Механическая система

Радиус-вектор **центра масс системы:**

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_k\vec{r}_k \ . \qquad (10.6)$$

Уравнение движения точки m_k механической системы, согласно (10.2), будет:

$$m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt} = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e \ . \qquad (4.6)$$

Просуммируем уравнения (4.6) по всем точкам m_k:

$$\frac{d^2\sum m_k\vec{r}_k}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^e \ . \qquad (4.7)$$

С учетом выражения для центра масс (10.6) получаем **теорему о движении центра масс:**

$$M \cdot \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum \vec{F}_k^e \ . \qquad (4.8)$$

Если $\sum F_k^e = 0$, то из (4.8) следует **закон сохранения движения центра масс:**

$$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = 0; \quad \vec{a}_c = 0; \quad \vec{v}_c = \overrightarrow{\text{const}}. \tag{4.9}$$

Перепишем (4.7) с учетом того, что $\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k$, и получим **теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме:**

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e . \tag{4.12}$$

После интегрирования получаем **теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме:**

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e , \tag{4.13}$$

где $\vec{S}_k^e = \int\limits_0^t F_k^e dt$ - импульс действия силы за время t .

Если $\sum F_k^e = 0$, то из (4.12) получаем **закон сохранения количества движения механической системы:**

$$\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}} . \tag{4.14}$$

Запишем теорему моментов (3.6) для массы m_k, разделив силы на внешние и внутренние

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_0(m_k\vec{v}_k) = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i), \text{ где } k = 1...n .$$

Если просуммируем для всех точек системы, то получим **теорему моментов для материальной системы:**

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_{ke}) , \tag{4.17}$$

где $\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0\left(m_k \vec{v}_k\right)$ - главным моментом количества движения системы.

Если $\sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) = 0$, тогда теорема (4.17) превращается в **закон сохранения момента количества движения:**

$$\vec{\boldsymbol{K}}_0 = \text{const} . \tag{10.7}$$

Для массы m_k, запишем теорему (3.11) об изменении кинетической энергии $d\frac{m_k v_k^2}{2} = dA_k^e + dA_k^i$. Просуммируем для всех точек системы и получим **теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:**

$$dT = d\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i . \tag{4.25}$$

Интегрируя (4.25) от начального положения (M_1) до конечного (M_2) получаем **теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:**

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i . \tag{4.26}$$

Разделим силы на активные $F_к^{ак}$ и реакции связей $F_к^r$.

Для идеальных связей $\sum dA_k^r = 0$, **поэтому для системы с идеальными связями теорема об изменении кинетической энергии** будет:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^a \ . \qquad (10.8)$$

Потенциальной энергией материальной точки в положении *M*, называется скалярная величина *П*, равная работе потенциальной силы при перемещении точки из этого положения в нулевое: $\Pi_{(M)} = A_{(MO)} = \int_{(M)}^{(0)} \vec{F} d\vec{r}$. Тогда теорема (10.8) запишется:

$$T_2 - T_1 = \sum A_{k_{(M_1 M_2)}} = \Pi_1 - \Pi_2 \ . \qquad (4.35)$$

Перепишем (4.35) в виде:

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1 = E = \text{const.} \qquad (4.36)$$

Выражение (4.36) – **закон сохранения механической энергии *E* при движении под действием потенциальных сил.**

При относительно движении точки ее абсолютное ускорение: $\vec{a}_a = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$. Введем обозначения $F_{пер}^{и} = -m\vec{a}_{пер}$; $F_{кор} = -m\vec{a}_{кор}$, тогда (10.1) превращается в о**сновной закон динамики относительного движения материальной точки:**

$$m\vec{a}_{от} = \sum \vec{F}_к + \vec{F}_{пер}^{и} + \vec{F}_{кор}^{и} \ . \qquad (6.4)$$

Рассмотрим неподвижную или уравновешенную систему, точки которой могут иметь перемещения δr_k .

Для каждой точки находящейся в равновесии системы можем записать:

$$\vec{F}_k^a + \vec{N}_k = 0, \qquad (8.1)$$

где $\vec{F}_k^a$ и $\vec{N}_k$ - главные векторы активных сил и реакций связи. Если $\delta\vec{r}_k$ - возможное перемещение точки, то работа суммарной силы, действующей на точку: $\delta A_k = \left(\vec{F}_k^a + \vec{N}_k^a\right)\delta\vec{r}_k = 0$, либо

$$\vec{F}_k \delta\vec{r}_k + \vec{N}_k^a \delta r_k = 0 \ . \qquad (8.2)$$

Просуммируем (8.2) по всем точкам системы

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0 \, , \qquad (8.4)$$

где $\delta A_k = \vec{F}_k^a \delta r_k$ и $\delta A_k^2 = N_k^a \delta r_k$ - возможные работы активной и реактивной сил. Так как для **идеальных связей** $\sum \delta A_k^r = 0$, то из (8.4) получаем **принцип возможных перемещений** (ПВП):

$$\sum \delta A_k^a = \sum \vec{F}_k^a \delta\vec{r}_k = \sum F_k \delta s_k \cos\alpha_k = 0 \ . \qquad (8.5)$$

Рассмотрим систему, точки которой имеют ускорение $a_{к.}$ Если введем силу инерции $\vec{F}_k^{и} = -m_k \vec{a}_k$, то основное уравнение динамики точки (10.1) запишется в виде условия равновесия

$$\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^r + \vec{F}_k^u = 0 . \qquad (8.7)$$

Если вместо (8.1) запишем работу сил (8.7) на возможном перемещении точки $\delta\vec{r}_k$ и просуммируем по всем точкам системы, то получим **общее уравнение динамики** или **принцип Даламбера-Лагранжа**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0 . \qquad (8.9)$$

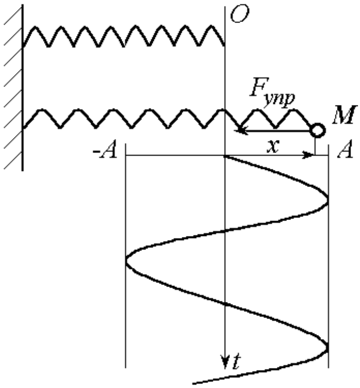
Итак, теоремы и законы динамики являются следствиями основного закона динамики (10.1).

Лекция 16

Тема 11. Прямолинейные колебания точки.

11.1. Свободные колебания.

Назовем силу восстанавливающей, если она стремится вернуть точку в равновесное положение. Примером такой силы является сила $F_{упр}$, которая направлена в сторону, обратную отклонению частицы M от ненапряженного состояния пружины, отмеченного т. O:



$$F_{упр} = -cx$$

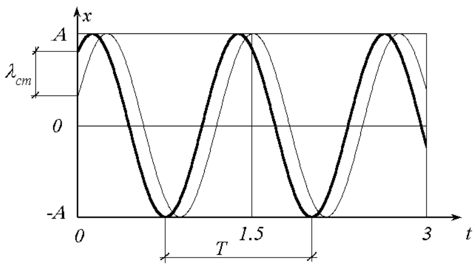
Найдем закон движения точки M с массой m. С этой целью запишем основной закон динамики:

$$m\ddot{x} = -cx . \qquad (11.1)$$

Введем обозначения $k^2 = c/m$ и перепишем (11.1) в виде:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 . \qquad (11.2)$$

Это дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления. Оно является линейным дифференциальным уравнением при правой части равной нулю. Его решение мы уже дважды рассматривали: при изучении сил и при исследовании физического маятника.



Решение уравнения (11.2) ищется в виде $x = e^{nt}$, после подстановки которого в (11.2) получим характеристическое уравнение:

$$n^2 + k^2 = 0,$$

с мнимыми корнями $n = \pm ki$. Тогда общее решение можно записать:

$$x = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) = A \sin(kt + \alpha) , \qquad (11.3)$$

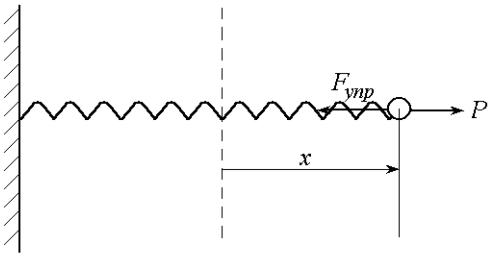
где C_1 и C_2; A и α - произвольные константы, определяемые начальными условиями.

В соответствии с (11.3) движение т. M является колебательными с периодом $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

Колебания, совершенные точкой M по синусоидальному закону, называются **гармоническими**.

Наибольшее отклонение точки M от ненапряженного (равновесного) состояния называется **амплитудой колебаний**. Величина $\varphi = kt + \alpha$ - называется **фазой колебаний**, а величина фазы при $t=0$ т.е. α - **начальной фазой**. Величина, обратная периоду $\nu = 1/T$ - называется **частотой колебаний** и показывает количество колебаний, совершенных за 1 сек. т.е. $[\nu] = 1/c = 1\,Гц$.

Влияние постоянной силы на свободные колебания.



Пусть кроме восстанавливающей силы $F_{упр}$ на частицу действует постоянная сила P. Запишем основное уравнение динамики:

$$m\ddot{x} = -cx + P \qquad (11.4)$$

Под действием силы P пружина будет деформироваться на $\lambda_{ст} = \dfrac{P}{c}$. Тогда с учетом того, что $P = c\lambda_{ст}$ выражение (11.4) можно записать так:

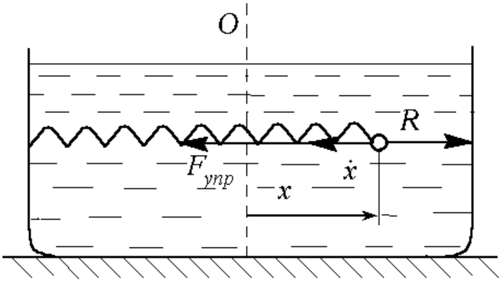
$$m\ddot{x}_1 = -cx_1, \qquad (11.5)$$

где $x_1 = x - \lambda_{ст}$.

Для уравнения (11.5) как и для уравнения (11.1) решение будет в виде (11.3), т.е.

$$x = \lambda_{ст} + A\sin(kt + \alpha). \qquad (11.6)$$

Таким образом, постоянная сила сдвинет нейтральную точку свободных колебаний на величину $\lambda_{ст}$ в сторону действия силы P.



11.2. Свободные колебания при вязком сопротивлении.

Пусть наша материальная точка колеблется в жидкости, и на неё дополнительно действует сила вязкого трения $\vec{R} = -\mu\vec{v}$.

Запишем основной закон динамики

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} \tag{11.7}$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0\,, \tag{11.8}$$

где $b = \dfrac{\mu}{2m}$.

Выражение (11.8) представляет уравнение свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости. Это линейное дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение которого имеет два корня:

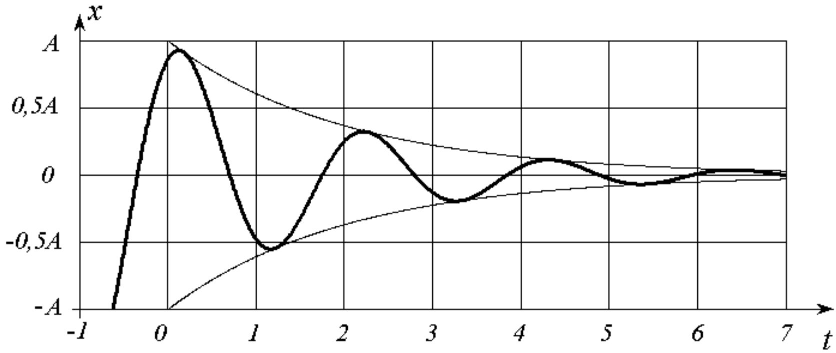
$$n_{1,2} = -b \pm i\sqrt{k^2 - b^2}\,, \tag{11.9}$$

а решение имеет следующий вид:

$$x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha)\,, \tag{11.10}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$. Так как множитель $e^{-bt} \to 0$ при $t \to \infty$, то выражение (11.10) представляет затухающие колебания с периодом:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}\,. \tag{11.11}$$



Из (11.11) видно, что сопротивление приводит также к увеличению периода колебаний. Множитель e^{-bT1} называется **декрементом (т.е. показателем уменьшения) затухающих колебаний**, а bT_1 – **логарифмическим декрементом**. Из (11.10) следует, что амплитуда каждого последующего колебания уменьшается в e^{-bT1} раз. На рисунке показаны затухающие колебания согласно выражению (11.10) при $A = 1$; $b = 0.5$ и $k_1 = 0.3$.

Из (11.9) видно, что при $b \geq k$ мнимая часть в решении исчезает, и движение перестает быть колебательным.

11.3. Вынужденные колебания и резонанс.

Пусть на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует переменная сила с циклической частотой *p,* которая изменяется по гармоническому закону

$$Q = Q_0 \sin pt \,. \tag{11.12}$$

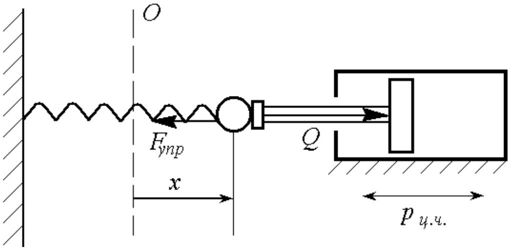
Тогда основное уравнение динамики будет

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt \,, \tag{11.13}$$

которое можно записать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt \,, \tag{11.14}$$

где $P_0 = Q_0 / m$.

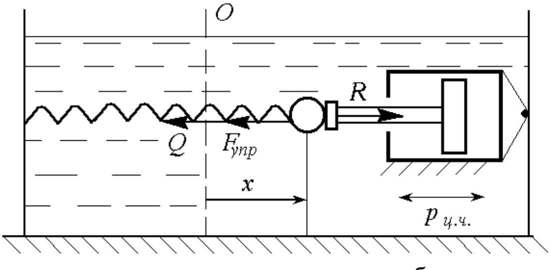


Выражение (11.14) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления. Его правая часть является функцией независимо переменной *t*. Решение имеет вид:

$$x = A\sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt \,. \tag{11.15}$$

Как видим, точка совершает два колебания:

1) собственные с частотой *k* и амплитудой *A*;
2) колебания с амплитудой $B = \dfrac{P_0}{k^2 - p^2}$ и частотой *p*, которые называются **вынужденными колебаниями**.



Так как при колебаниях всегда существует сопротивление, то собственные колебания со временем затухают и точка совершает только вынужденные колебания. Как видим, амплитуда их зависит от соотношения частот собственных и вынужденных колебаний. При *p* = *k* амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности. Это явление, при котором частота собственных колебаний *k* совпадает с частотой вынужденных *p*, называется **резонансом**.

Так как существуют силы сопротивления, то при резонансе, т.е. при *p* = *k* в действительности амплитуда колебаний увеличивается, но не до бесконечности.

11.4. Вынужденные колебания при наличии сопротивления.

Пусть на частицу дополнительно к силам $F_{упр}$ и Q действует сила вязкого сопротивления $R = -\mu\dot{x}$. Тогда основное уравнение динамики будет

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin pt\,, \qquad (11.16)$$

которое в принятых обозначениях запишется:

$$\ddot{x} + 2b\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt\,, \qquad (11.17)$$

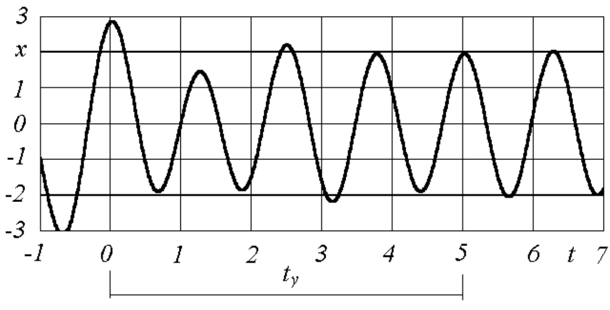
где $P_0 = \dfrac{Q_0}{m}$.

Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки при наличии вязкого сопротивления. Решение линейного дифференциального уравнения (11.17), как не трудно проверить, запишется в виде суммы собственных и вынужденных колебаний:

$$x = Ae^{-bt}\sin(kt + \alpha) + B\sin(pt - \beta) \qquad (11.18)$$

где амплитуда вынужденных колебаний будет:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}\,, \qquad (11.19)$$



а начальная их фаза β определяется выражением:

$$tg\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2} \qquad (11.20)$$

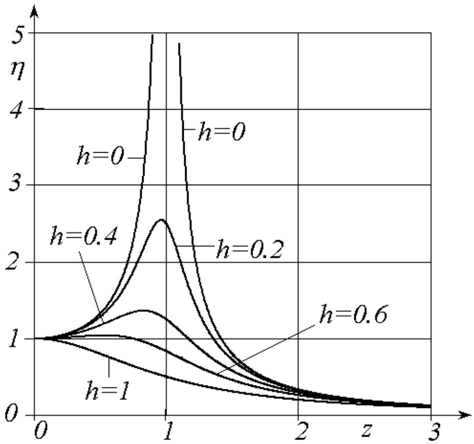
Из-за наличия множителя e^{-bt} собственные колебания затухают, и материальная точка совершает вынужденные колебания. Как правило, из условия $Ae^{-bt} = 0{,}01B$ вводится время установления вынужденных колебаний $t_y = \dfrac{1}{b}\ln\dfrac{100A}{B}$. На рисунке показаны колебания точки согласно (11.18) при $A = 1$; $B = 2$; $k_1 = 3$; $p = 5$. В этом случае $t_y = 5$ и при $t > t_y$ собственные колебания практически затухли и точка колеблется с частотой вынужденных колебаний p.

Преобразуем амплитуду (11.19), разделив числитель и знаменатель на k^2

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4h^2 z^2}} \qquad (11.21)$$

где $\eta = B / \lambda_0$ – коэффициент динамичности;

$\lambda_0 = P_0 / k^2 = Q_0 / mk^2 = Q_0 / c$ - величина статического отклонения при действии вынуждающей силы Q_0 амплитудой;
$h = b / k$ –характеристика вязкого сопротивления;
$z = p / k$ - отношение частот.



Зависимость динамичности η от отношения частот z при разных коэффициентах h показана на рисунке. При равенстве частот (z = 1) наступает резонанс. И с уменьшением величины вязкого сопротивления (h), относительная амплитуда (η) будет увеличивается и при h = 0 стремится к бесконечности.

Явление резонанса играет важную роль в технике. При переменных нагрузках стремятся не допускать наступление резонанса, т.к. оно приводит к разрушению конструкции. В радиотехнике, наоборот, подбором собственной частоты колеблющегося контура можно достигнуть резонанса с принимаемой радиоволной, и таким образом усилить слабый сигнал.

Печатается по решению учебно-методического совета ТюмГАСА от 03.12.04г.

Рецензенты

Заслуженный деятель науки РФ, зав. кафедрой теоретической механики и баллистики Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, профессор, д.т.н. Г.Т. Алдошин

Доцент кафедры теоретического анализа и теории функций Тюменского государственного университета, к.ф.-м.н. Л.Г. Агеносов

Доцент кафедра строительной механики Тюм.ГАСА, к.ф.-м.н. Т.А. Нарута

Подписано к печати 03.12.04 г.

Тираж 200 экз.