Смульский И.И. Конструирование кольцевых структур / Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы VI Всероссийской научной конференции, посвященной 130-летию Томского государственного университета и 40-летию НИИ Прикладной Математики и Механики Томского государственного университета. Томск, 30 сентября – 2 октября 2008 г. – 2008 г. – С. 431-432.

КОНСТРУИРОВАНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ СТРУКТУР

И. И. Смульский
НИУ Институт криосферы Земли СО РАН
625000, Тюмень, а/я 1230 ИКЗ СО РАН
Телефон:(3452) 688714, E-mail: jsmulsky@mail.ru

Проблемы устойчивости и существования колец планет, шаровых звездных скоплений и галактик могут быть исследованы на поведении многослойных кольцевых структур. В последнее время интенсивно исследуются различные осесимметричные структуры, состоящие из 9-и тел [1], 10-и [2] и большего количества тел. По-видимому, они могут быть описаны в виде предлагаемых кольцевых структур. Алгоритм их построения основан на точном решении осесимметричного взаимодействия n-тел [3]. На каждое периферийное тело массой m_1 одного кольца (см. рис. 1) все остальные его периферийные тела и центральное тело воздействуют направленной к центру силой

$$F = G(m_0 + m_1 f_n)m_1 / r^2\,, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; r – расстояние от центрального тела m_0 до периферийного m_1; функция f_n, зависит от числа тел n:

$$f_n = 0.25\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sin[(i-1)\pi/n]}\,. \qquad (2)$$

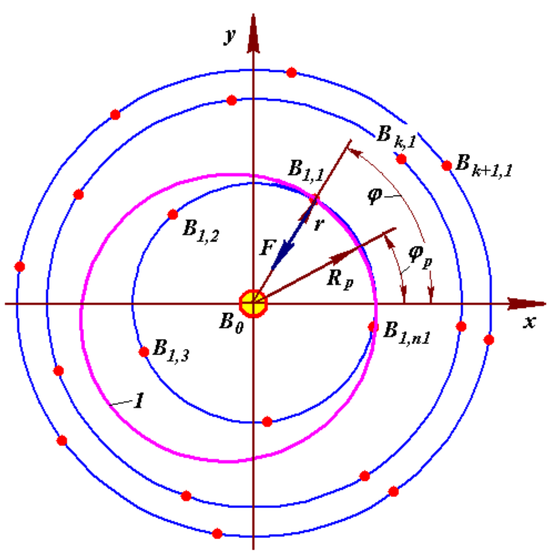

Рис. 1. Кольцевая структура осесимметрично расположенных периферийных тел $B_{k,ik}$ относительно центрального тела B_0. *1* – эллиптическая орбита первого тела на первом кольце.

Под действием силы (1) все периферийные тела движутся по траектории, которая в полярных координатах (r, φ) (см. рис. 1) имеет вид:

$$r = \frac{R_p}{(\alpha_1+1)\cos(\varphi-\varphi_p)-\alpha_1}\,, \qquad (3)$$

где угол φ отсчитывается от оси x; φ_p – угол перицентрия; $\alpha_1 = \mu_1/(R_p v_p^2)$ – параметр траектории; $\mu_1 = -G\,(m_0+m_1\cdot f_n)$ – параметр взаимодействия; R_P – радиус перицентрия и v_p – скорость тела в перицентрии.

Уравнение (3) при α_1 = -1 представляет окружность; при -1 < α_1 < -0.5 – эллипс. Запишем также выражения для радиальной v_r и трансверсальной v_t скоростей:

$$v_r = \pm v_p\sqrt{(\alpha_1+1)^2-(\alpha_1+R_p/r)^2}\,; \quad v_t = v_p R_p/r\,, \qquad (4)$$

где v_r < 0 при движении от апоцентрия к перицентрию, т.е. при $2\pi > \varphi - \varphi_p > \pi$; а также для эксцентриситета e орбиты и большой ее полуоси a и периода обращения T:

$$e = -(1+1/\alpha_1)\,, \quad a = \frac{2R_p\alpha_1}{2\alpha_1-1}\,; \quad T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{-\mu_1}} \qquad (5)$$

Если в начальный момент (см. рис. 1) полярные координаты тела $B_{1,1}$ равны r_0 и φ_0, то его декартовые координаты и скорости в плоскости орбиты запишутся:

$$x_0 = r_0\cdot\cos\varphi_0; \qquad y_0 = r_0\cdot\sin\varphi_0 \qquad (6)$$

$$v_{x0} = v_r\cdot\cos\varphi_0 - v_t\cdot\sin\varphi_0; \qquad v_{y0} = v_r\cdot\sin\varphi_0 + v_t\cdot\cos\varphi_0. \qquad (7)$$

Создание кольцевых структур основано на следующих двух положениях.

1. На тело, расположенное снаружи кольцевой структуры, сила воздействия равна силе, которую создавало бы тело, расположенное в центре структуры и имеющее массу равную массе всей структуры.

2. На тело, расположенное внутри кольцевой структуры, суммарная сила воздействия от всех ее тел равна нулю.

Доказательства этих двух положений для непрерывного распределения массы по шаровому слою дано на стр. 230-232 [4]. Нетрудно показать, что они остаются справедливыми и для непрерывного кольцевого слоя на плоскости. Для кольца дискретных тел эти положения локально нарушаются. Однако при орбитальном движении тела эти локальные нарушения в значительной степени нивелируются. Поэтому рассчитанная с помощью двух принципов структура может существовать.

Итак, пусть кольцевая структура состоит из K колец. На каждом кольце, например с номером k, расположено n_k тел, массы которых одинаковы, т.е. $m_{k,ik} = m_k$, где индекс $ik = i_k = 1\ldots n_k$ – номера тел на k-том кольце. На каждое тело, находящееся на кольце k, в соответствии с положением 2, тела на внешних кольцах с номерами от k +1 до K не будут оказывать воздействия. А сила воздействия на каждое тело с массой m_k в соответствии с положением 1 и формулой (1) запишется так:

$$\vec{F}_k = -\frac{Gm_k\vec{r}_k}{r_k^3}[m_0 + \sum_{j=1}^{k-1} n_j\cdot m_j + m_k\cdot f(n_k)]\,. \qquad (8)$$

Тогда параметр взаимодействия для каждого тела k-того кольца будет:

$$\mu_{1k} = -G[m_0 + \sum_{j=1}^{k-1} n_j m_j + m_k f(n_k)]\,. \qquad (9)$$

А параметр траектории этого тела будет

$$\alpha_{1k} = \frac{\mu_{1k}}{R_{pk} \cdot v_{pk}^2}\,. \qquad (10)$$

На k-том кольце угловое положение первого тела $B_{k,1}$ в начальный момент $t = 0$ обозначим как $\varphi_{0,k,1}$, тогда полярные углы всех тел k-того кольца определяться так:

$$\varphi_{0,k,ik} = \varphi_{0,k,1} + (i_k - 1)\cdot\Delta\varphi_k, \qquad (11)$$

где $i_k = 1\ldots n_k$; $\Delta\varphi_k = 2\pi/n_k$.

Так как у всех тел k-того кольца полярный радиус $r_{0,k}$ в начальный момент один и тот же, то его определяем из уравнения (3) по углу $\varphi_{0,k,1}$ первого тела и радиусу перицентрия $R_{p,k}$. Радиус перицентрия и параметр траектории $\alpha_{1,k}$ одинаковы для всех тел k-того кольца. Декартовые координаты $x_{0,k,ik}$, $y_{0,k,ik}$ и скорости $v_{x0,k,ik}$ и $v_{y0,k,ik}$ для всех тел k-того кольца определяются по формулам (6)-(7) по найденному радиусу $r_{0,k}$ и полярному углу каждого тела $\varphi_{0,k,ik}$. Входящие в (6)-(7) радиальная $v_{r0,k}$ и трансверсальная $v_{t0,k}$, скорости являются одинаковыми для всех тел k-того кольца и определяются по формулам (4).

Исходными характеристиками кольцевой структуры являются: количество колец K, масса центрального тела m_0, четыре параметра каждого кольца: количество тел на кольце n_k, масса периферийного тела m_k, радиус перицентрия $R_{p,k}$, эксцентриситет орбиты e_k или параметр траектории $\alpha_{1,k}$; а также два угловых параметра: начальный угол первой частицы $\varphi_{0,k,1}$ и угол ее перицентрия $\varphi_{p,k}$, т.е. всего $P = 6{\cdot}K + 2$ параметров. С помощью этих параметров по формуле (9) определяется параметр взаимодействия $\mu_{1к}$, из формулы (10) – скорость в перицентрии $v_{p,k}$, затем по представленному выше алгоритму рассчитываются координаты и скорости всех тел кольцевой структуры.

Табл. 1. Параметры моделей кольцевых структур в единицах: массы периферийных тел m_k – в массах периферийного тела на первом кольце; радиусы перицентриев $R_{p,k}$ – в астрономических единицах (а.е.); периоды обращений T – в годах. Dn – характеристика динамики в течение 30 лет: Устойчива – нет видимых изменений в течение 30 лет; НУ – разрушается за указанное число лет.

Параметры	Значения параметров для каждого кольца для разных моделей кольцевых структур					
	Мод. *1*, $m_0 = M_S$			Мод. 10, $m_0 = 0.5M_S$		
	1	2	3	1	2	3
n_k	5	7	8	6	7	7
m_k	1	2	3	1	2	3
$R_{p,k}$	1	2	3	1	10	16
e_k	0	0	0	0	0	0
T_k	1.4	4	7.3	1.4	39.9	70.3
Dn	Устойчива			НУ, 23 г.		

Располагая свободными P параметрами кольцевой структуры можно задать различные дополнительные условия для создания определенных ее свойств. Например, в работах [1]-[2] рассматриваются осесимметричные структуры, в которых тела движутся по круговым орбитам с одинаковой угловой скоростью. Такая структура может быть задана с помощью условий: $\alpha_{1,k} = -1$ и $T_k = T$. Из свободных P параметров будет использовано $2{\cdot}K$ параметров для записи согласно выражениям (5) системы из $2{\cdot}K$ алгебраических уравнений. В результате ее решения это количество параметров будет определено.

Мы рассмотрели две группы кольцевых структур, масса тел которых равнялась массе m_{SS} Солнечной системы. В первой группе масса центрального тела равнялась массе Солнца $m_0 = m_S$, а во второй – $m_0 = 0.5{\cdot}m_S$. Структуры состоят из трех колец, т.е. K =3 и общее число тел N =21. Варьировались все 6 видов параметров. По рассчитанным начальным условиям были численно проинтегрированы дифференциальные уравнения движения (метод см. [5]) и рассмотрено движение тел в кольцевых структурах. В табл. 1 приведены основные параметры двух моделей и итоговые результаты по их устойчивости.

В первой группе моделей в модели 1 орбиты были круговые, а во второй – эллиптические с эксцентриситетами по кольцам 0.05, 0.1 и 0.15. За 30 лет движения видимых изменений в этих моделях не наблюдается. Во второй группе, с большими массами периферийных тел, последовательно увеличивались размеры орбит от 3 а.е. до 16 а.е. В этих моделях изменения появляются на первых годах их динамики. Затем они усиливаются и кольцевая структура нарушается. Эти модели неустойчивы. Неустойчивость обусловлена локальным взаимодействием периферийных тел между собой.

В табл. 1 приведены по одной модели для каждой группы. Модель 1 с малыми массами периферийных тел – устойчива. В модели 10 изменения начинаются с взаимодействия между телами двух наружных колец, которые в дальнейшем приводят к образованию общего кольца и через 23 года движения – к разрушению внутреннего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенников Е.А., Диарова Д.М., Земцова Н.И. Существование и неустойчивость ромбоподобных центральных конфигураций в смысле Уинтпера для ньютоновской модели девяти тел // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2006.-с. 77-89.
2. Гуцу В.Д., Диарова Д.М., Земцова Н.И. Исследование устойчивости стационарных решений ромбоподобной ограниченной задачи десяти тел // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. М.: Из-во ВЦ РАН, 2007.-с.99-109.
3. Смульский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел// Математическое моделирование. – 2003, т. 15, № 5, с. 27-36.
4. Смульский И. И. Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосибирского ун-та, ННЦ ОИГГМ СО РАН. - 1999. - 294с.
5. Гребеников Е.А., Смульский И.И. Эволюция орбиты Марса на интервале времени в сто миллионов лет / Сообщения по прикладной математике. Российская Академия Наук: ВЦ им. А.А. Дородницына. М.: ВЦ РАН А.А. Дородницына. – 2007. 63 с. ***http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/EvMa100m4t2.pdf***.