

Точное решение гомографической задачи для неограниченного количества тел

Joseph J. Smulsky
Institute of Earths Cryosphere
PO Box 1230, 625000, Tyumen, RUSSIA
Jsmulsky@mail.ru

Существуют точные решения гравитационного ньютоновского взаимодействия N -материальных точек при определенной их конфигурации. Например, при осесимметричном расположении N -тел на окружности эта задача решена в полном объеме [1]. При этом в центре окружности может находиться центральное тело. В зависимости от начальной скорости периферийные тела могут двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. Кроме такой однослойной конфигурации в ряде работ, например [2], рассматриваются точные решения конфигураций из нескольких слоев. Обычно их рассматривают как систему вложенных друг в друга воображаемых многоугольников, вращающихся с угловой скоростью ω как единое целое. В вершинах многоугольников расположены материальные точки, которые взаимодействуют между собой по закону тяготения Ньютона. В обобщающей работе [2] приведены примеры решения задач для вложенных друг в друга треугольников, ромбов, квадратов, пятиугольников и шестиугольников. При этом вершины соседних многоугольников могут лежать либо на одном радиусе, либо на радиусах, проходящих через середины сторон соседних многоугольников.

Эти задачи решены [2] для нескольких слоев таких многоугольников: для треугольников – до 4-х слоев, для квадратов – до 3-х, для пятиугольников и шестиугольников – до 2-х слоев. Наибольшее число взаимодействующих тел, находящихся в вершинах этих многоугольников, было 12.

В рамках гамильтоновой динамики эта задача сводится к системам алгебраических уравнений, которые решаются методами компьютерной алгебры [2]. В каждом случае задача требует особого рассмотрения, и требуется затратить немало усилий для ее решения.

Эти задачи взаимодействующих материальных точек, находящихся в вершинах вложенных друг в друга многоугольников, рассматривают как задачи гомографической динамики. В свою очередь гомографическая динамика является новым разделом космической динамики [2]. Рассматриваемые задачи являются необходимым этапом, ведущим к решению проблем существования колец планет, шаровых звездных скоплений и галактик.

В настоящей работе рассматривается несколько иной подход к решению этих задач. Он является продолжением метода, использованного для решения осесимметричной задачи [1] и при рассмотрении многослойных кольцевых структур [3]. Движение тел рассматривается на основе сил взаимодействия между ними. Вместо многоугольников, воображаемые стороны которых соединяют частицы, мы рассматриваем окружности, на которых находятся частицы.

Из анализа работы [2] следует, что почти все гомографические задачи можно рассматривать в виде многослойных кольцевых структур материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. Для математического описания такой структуры оказалась важным систематизировать ее параметров. За основу была принята систематизация параметров в работе [3]. Многослойная осесимметричная структура состоит из N_2 окружностей, на каждой из которых расположено N_3 тел. Совокупность тел, центры которых расположены на одной окружности будем называть кольцом тел или слоем. Номера колец обозначены как $j = 1, 2 \dots N_2$, а номера тел на каждом кольце – $l = 1, 2 \dots N_3$. Все тела на одном кольце имеют одинаковый радиус $r_{j,l} = r_j$, где r_j – радиус кольца, и массы их одинаковы, т.е. $m_{j,l} = m_j$. Угол первого тела на каждом кольце $\varphi_{j,1}$ определяет вид структуры.

Выведены силы воздействия всех тел на первое тело на кольце j , и в траекторной системе координат записано дифференциальное уравнение его движения. В результате анализа установлено, что это уравнение будет идентичным для остальных тел, если угол первого тела на каждом кольце $\varphi_{j,1}$ равен 0 либо половине угла между соседними телами на кольце. Тогда N_2 дифференциальных уравнений превращаются в N_2 алгебраических уравнений. Они описывают вращающуюся с угловой скоростью ω осесимметричную структуру, состоящую из N_2 слоев.

Задаваемыми параметрами многослойной вращающейся структуры являются: N_2 , N_3 , $\varphi_{j,1}$, m_0 – масса центрального тела, ω , а радиусы или массы периферийных тел определяются N_2

уравнениями. С целью создания одного алгоритма решения задачи для многослойной структуры с центральным телом и без него, вводится исходная масса m_i центрального тела и всех тел первого кольца. Доля в ней массы центрального тела обозначена коэффициентом pm_0 . Тогда масса центрального тела определится как $m_0 = m_i pm_0$. Структура без центрального тела задается коэффициентом $pm_0 = 0$.

Анализ возможных применений результатов этой задачи показывает, что целесообразно задавать геометрию осесимметричной многослойной структуры, в том числе и радиусы колец r_j , а затем в результате решения уравнений определять массы m_j .

Для решения алгебраических уравнений разработана программа RtCrcSt2.for. В результате решения задачи может быть получена часть масс отрицательными. Поэтому необходимо подбирать параметры так, чтобы все массы были положительными. Программа RtCrcSt2.for позволяет подобрать необходимые параметры, определяющие структуру. Дополнительно, эта программа подготавливает файл исходных и начальных данных для программы Galactica, которая имеется в свободном доступе [4]- [5]. Система Galactica позволяет исследовать динамику многослойной вращающейся структуры и исследовать ее эволюцию. Это необходимо делать при дальнейшем использовании таких структур.

Выполненные исследования показали, что с позиции силового взаимодействия все многослойные вращающиеся структуры являются неустойчивыми. Однако время существования структуры может меняться в широких пределах. При рассмотрении параметров структуры в безразмерных единицах, время ее существования тем больше, чем меньше ее относительная скорость вращения. При определенной скорости, на время существования влияет точность расчета параметров структуры. Кроме того, если рассматриваемая структура находится среди других воздействующих тел, то периферийные тела начинают колебаться. Это нарушает их тенденцию к сближению, и время существования структуры может увеличиться [6].

В процессе решения этой проблемы были рассчитаны многослойные вращающиеся структуры с числом колец 1, 2, 3, 4, 5, 15, 30, 100, 103, 1000. На каждом кольце задавалось число тел: 2, 5, 8, 10, 29, 30, 999. Рассматривались варианты конфигураций с разными вариантами угла $\varphi_{j,1}$ первого тела на каждом кольце, а также с разным чередованием его на соседних кольцах. Были рассчитаны структуры, которые формируются при разных исходных массах. В качестве исходных масс задавались массы Земли и Солнца. Рассматривались структуры с центральным телом и без него.

Большинство гомографических задач представлено вложенными друг в друга правильными многоугольниками [2]. Однако имеются и неправильные многоугольники, например, вложенные друг в друга ромбы. В работе показано, что такая многослойная ромбическая структура создается в виде ряда колец, на каждом из которых находится 2 тела, а углы первых тел на кольцах чередуются.

Литература

1. Смутьский И.И. Осесимметричная задача гравитационного взаимодействия N-тел// Математическое моделирование. - 2003, т. 15, № 5, с. 27-36. .. <http://www.smul1.newmail.ru/Russian1/IntSunSyst/Osvnb4.doc>.
2. Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. М.: МАКС Пресс, 2010. – 256 с.
3. Смутьский И. И. Многослойные кольцевые структуры// Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, No. 5(168). С. 737-743. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/MnsKoStr4c.pdf>.
4. Smulsky J.J. The System of Free Access Galactica to Compute Interactions of N-Bodies. I.J.Modern Education and Computer Science, 2012, 11, 1-20. <http://www.mecs-press.org/>. DOI: 10.5815/ijmecs.2012.11.01.
5. <http://www.ikz.ru/~smulski/GalactW/>.
6. Мельников В. П., Смутьский И.И., Смутьский Я.И. Составная модель вращения Земли и возможный механизм взаимодействия континентов // Геология и Геофизика, 2008, №11, с. 1129-1138. <http://www.ikz.ru/~smulski/Papers/RGGRu190.pdf>.