Гребеников Е.А., Смульский И.И. О решении уравнения Даламбера и о силе взаимодействия движущихся зарядов. Сб. «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа”, Москва, ВЦ РАН, 2009, с.145-163.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА И О СИЛЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Е. А. Гребеников[1)], И. И. Смульский[2)]
[1] Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, г. Москва, E-mail: e-greben@yandex.ru;
[2] Институт криосферы Земли СО РАН, г. Тюмень, E-mail: jsmulsky@mail.ru

1. Введение

В работах [1-5] показано, что точечное наэлектризованное тело с зарядом q_1 (рис. 1), которое движется со скоростью $\vec{v}$ относительно другого точечного наэлектризованного тела с зарядом q_2, создает силовое воздействие на магнит, если поместить его вместо заряда q_2. Отметим, что со временем в электродинамике абстрагировались от взаимодействия между конкретными телами. Было введено поле, и воздействие одного наэлектризованного тела на другое представляли следующим образом: наэлектризованное тело с зарядом q_1 создает электростатическое поле с напряженностью E, которое воздействует на другое наэлектризованное тело с зарядом q_2 силой $F = q_2 \cdot E$. Аналогично, с помощью напряженности H описывается воздействие одного магнита на другой. Так как нас интересуют силы взаимодействия между телами, то в настоящей работе мы не используем промежуточных характеристик воздействия: напряженностей E и H, а также индукций: электрической D и магнитной B.

Итак, движущееся наэлектризованное тело q_1 создает в точке нахождения неподвижного тела q_2 магнитное воздействие. Так как в процессе движения расстояние между телами изменяется, магнитное воздействие также меняется. В свою очередь, переменное магнитное воздействие создает дополнительное электрическое воздействие на заряд q_2. Эти два процесса описываются первым и вторым уравнениями Максвелла [3]. Если исключить из них магнитную составляющую, тогда сила воздействия $\vec{F}$ движущегося заряда q_1 на неподвижный заряд q_2 в гауссовской системе единиц будет определяться уравнением Даламбера:

$$\Delta\vec{F} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} = \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\left[\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \text{grad}\,\rho\right], \tag{I}$$

где Δ – оператор Лапласа;

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{II}$$

c – скорость света в вакууме;
ε – диэлектрическая проницаемость среды между зарядами;
μ – магнитная проницаемость среды;
c_1 – скорость света, а также электромагнитного воздействия в среде;
ρ – плотность электрического заряда q_1.

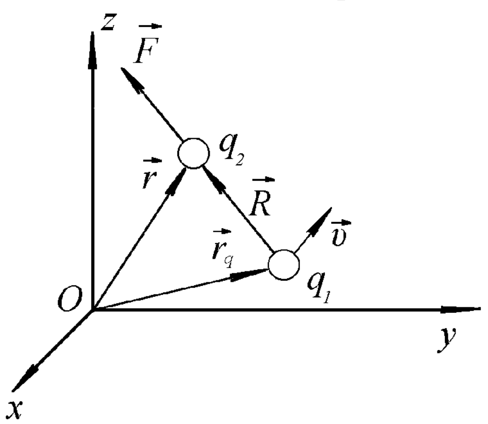

Рис.1. Схема воздействия движущегося заряда q_1 на заряд q_2, покоящийся относительно q_1.

Если заряд q_1 покоится ($\vec{v}$ =0) и величина его заряда постоянна (ρ = const), то сила его воздействия в рассматриваемом положении будет постоянна во времени ($\partial\vec{F}/\partial t = 0$) и уравнение (I) превращается в уравнение Лапласа:

$$\Delta\vec{F} = \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\rho. \tag{III}$$

Как известно, его решением для точечного заряда q_1 является закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{q_2 q_1 R}{\varepsilon R^3}. \tag{IV}$$

Для движущегося заряда со скоростью $\vec{v}$ относительно заряда q_2 сила воздействия будет отличаться от закона Кулона (IV), и как отмечалось выше, она будет определяться решением уравнения Даламбера (I). Для нахождения силы, с которой движущийся со скоростью $\vec{v}$ точечный заряд q_1 действует на другой точечный заряд q_2, необходимо решить уравнение Даламбера (I).

2. Плотность движущегося заряда

Мы рассматриваем относительное движение (рис.1): заряд q_1 движется со скоростью $\vec{v}$ относительно заряда q_2. Плотность заряда q_1 как точечного объекта можно записать с помощью δ-функции [6], которая в зависимости от координаты x имеет следующий вид:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp i(x - x')k_1 \mathbf{d}k_1 = \begin{cases} 0, & x \neq x', \\ \infty, & x = x' \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\mathbf{d}x = 1, \tag{2}$$

где i – мнимое число; x' – координата заряда q_1; в интеграле (1) переменная интегрирования – k_1, а в (2) – x.

С помощью δ-функции плотность заряда q_1 в пространственной системе координат xyz запишется в виде:

$$\rho = q_1\delta(x - x')\,\delta(y - y')\delta(z - z'). \tag{3}$$

В этой системе координат обозначим: $r = ix + jy + kz$ – радиус-вектор точки пространства, где может находиться заряд q_2; $\vec{r}_q = \vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z'$ – радиус-вектор заряда q_1, где x', y', z' являются функциями времени. Тогда, после подстановки выражений для δ-функций в (3), получаем выражение для плотности

$$\rho = \frac{q_1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left[k_1(x - x') + k_2(y - y') + k_3(z - z')\right]\mathbf{d}k, \tag{4}$$

где интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{d}k$ обозначает тройной интеграл $\iiint \mathbf{d}k_1\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3$. Очевидно, что при условии (2), интеграл по всему пространству $\int \rho\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z = q_1$, где ρ определяется выражением (4). Таким образом, δ-функция позволяет интерпретировать распределение точечного заряда по всему пространству с одновременной локализацией его в месте нахождения самого заряда q_1. Теперь мы можем воспользоваться уравнением Даламбера (I) для нахождения силы $\vec{F}$, с которой заряженное тело с нестационарной плотностью электричества ρ действует на неподвижный заряд q_2.

3. Уравнение Даламбера в комплексных переменных

Воспользуемся обозначением оператора Даламбера,

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{5}$$

и с учетом (5) перепишем уравнение Даламбера (I) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\left[\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\upsilon_x\right]; \\ F_y &= \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\upsilon_y\right]; \\ F_z &= \frac{4\pi q_2}{\varepsilon}\left[\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\upsilon_z\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где $\upsilon_x = \mathbf{d}x' / \mathbf{d}t$, $\upsilon_y = \mathbf{d}y' / \mathbf{d}t$ и $\upsilon_z = \mathbf{d}z' / \mathbf{d}t$ – проекции скорости $\vec{\upsilon}$ заряда q_1. После подстановки плотности заряда (4) в уравнения (6) для проекции F_x имеем:

$$F_x = \frac{q_1 q_2 i}{2\pi^2 \varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\beta_x^2\right)k_1 - \beta_x\beta_y k_2 - \beta_x\beta_z k_3\right]\exp(i\, r_v)\mathbf{d}k, \tag{7}$$

где

$$r_v = k_1\left(x - x'\right) + k_2\left(y - y'\right) + k_3\left(z - z'\right), \tag{8}$$

$$\beta_x = \frac{\upsilon_x}{c_1}, \quad \beta_y = \frac{\upsilon_y}{c_1}, \quad \beta_z = \frac{\upsilon_z}{c_1}.$$

Уравнение Даламбера (7) определяет x-проекцию силы воздействия движущегося заряда q_1 на неподвижный заряд q_2. Аналогично запишутся составляющие силы на оси y и z.

4. Сведение уравнения Даламбера к интегральному виду

Оператор Даламбера выражения (7) не зависит от переменных интегрирования k_1, k_2, k_3 в его правой части, поэтому уравнение (7) символически можно записать в форме:

$$F_x = \frac{q_1 q_2 i}{2\pi^2 \varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-\beta_x^2\right)k_1 - \beta_x\beta_y k_2 - \beta_x\beta_z k_3\right]^{-1}\exp(i\, r_v)\mathbf{d}k. \tag{9}$$

Проекция силы F_x (9) будет представлена в виде интеграла, если определить

$$^{-1}\exp\,(i\,r_v) = G\,. \qquad (10)$$

Функцию G называют функцией Грина [7]. Ее можно теперь определить как решение уравнения

$$G = \exp\,(i\,r_v)\,, \qquad (11)$$

которое является линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с правой частью. Нас не интересует общее решение уравнения (11), поскольку мы ищем только воздействие от заряда q_1, которое определяется правой частью (11). Его частное решение запишем в виде

$$G = C \cdot \exp\,(i\ r_v)\,. \qquad (12)$$

Подстановка выражения (12) в уравнение (11) позволяет определить коэффициент

$$C = -\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}\,.$$

После подстановки этого коэффициента в (12), для функции Грина получим следующее представление:

$$G = -\frac{\exp\,(i\ r_v)}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2}\,. \qquad (13)$$

Если заменить в (9) выражение (10) функцией Грина, получаем представление для силы в виде интеграла

$$F_x = -\frac{q_1 q_2 i}{2\pi^2 \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1-\beta_x^2\right)k_1 - \beta_x \beta_y k_2 - \beta_x \beta_z k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \left(\beta_x k_1 + \beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2} \exp(i\ r_v)\mathbf{d}k\,. \qquad (14)$$

Преобразуем (14), выделяя интеграл по переменной k_1,

$$F_x = -\frac{q_1 q_2 i}{2\pi^2 \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\, i\left[k_2\left(y-y'\right) + k_3\left(z-z'\right)\right] I_1 dk_2 dk_3\,, \qquad (15)$$

где I_1 в подынтегральном выражении (15) имеет вид:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\left(1-\beta_x^2\right) k_1 - \left(\beta_x\beta_y k_2 + \beta_x\beta_z k_3\right)\right] \exp\, i\left(x-x'\right) k_1}{k_1^2 - \beta_x^2 k_1^2 - 2\beta_x k_1\left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right) + a^2}\, \mathbf{d}k_1\,, \qquad (16)$$

где

$$a^2 = k_2^2 + k_3^2 - \left(\beta_y k_2 + \beta_z k_3\right)^2. \qquad (17)$$

5. Вычисление интегралов

Рассматриваем интегралы (15) и (16) в случае скорости движения заряда не превосходящей скорости c_1, т.е. будем считать, что

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \le 1\,. \qquad (18)$$

Исследуем знак выражения (17) для a^2. При предельных значениях скорости β величина a^2 заключена в пределах от $a^2 = k_2^2 + k_3^2$ при $\beta_y = \beta_z = 0$ до $a^2 = [k_2(1-\beta_y^2)^{1/2} - k_3\beta_y]^2 > 0$ при $\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$, т.е. она является положительной величиной. Перепишем выражение (17) в виде

$$a^2 = k_2^2(1-\beta_y^2) + k_3^2(1-\beta_z^2) - 2\beta_y\beta_z k_2 k_3 .$$

Оно может быть отрицательным лишь тогда, когда третье слагаемое положительно, например, когда β_y, β_z, k_2 и k_3 имеют одинаковые знаки или попарно одинаковые знаки. Из (17) найдем приращение (дифференциал) $\mathbf{d}(a^2)$ при изменении β:

$$\mathbf{d}(a^2) = -2(\beta_y k_2 + \beta_z k_3)(k_2\mathbf{d}\beta_y + k_3\mathbf{d}\beta_z).$$

Нетрудно убедиться, что при этих знаках β_y, β_z, k_2 и k_3 приращение $\mathbf{d}(a^2) < 0$, т.е. a^2 монотонно изменяется. А так как в предельных случаях по β величина a^2 положительна, то и во всем диапазоне она положительна.

Введем обозначения: $e_1 = \sqrt{1-\beta_x^2}$; $b = \beta_x(\beta_y k_2 + \beta_z k_3)$; $x_q = x - x'$, а ζ – комплексное число. Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости

$$\oint \frac{(e_1^2\zeta - b)\exp ix_q\zeta}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\mathbf{d}\zeta . \tag{19}$$

При этих обозначениях видно, что подынтегральное выражение (19) при $\zeta = k_1$ совпадает с подынтегральным выражением (16). Знаменатель подынтегральной функции в (19) имеет нули при

$$\zeta_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 e_1^2}}{e_1^2}, \tag{20}$$

где

$$b^2 - a^2 e_1^2 = -\left\{ (k_2^2 + k_3^2)(1-\beta_x^2) - (\beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2 \right\}. \tag{21}$$

Способом, аналогичным тому, какой применялся при исследовании знака a^2, можно показать, что $b^2 - a^2 e_1^2 < 0$. Тогда после подстановки значений b, a^2, e_1 в (21), нули знаменателя будут равны

$$\zeta_{1,2} = \frac{\beta_x(\beta_y k_2 + \beta_z k_3) \pm i\sqrt{(k_2^2 + k_3^2)(1-\beta_x^2) - (\beta_y k_2 + \beta_z k_3)^2}}{1-\beta_x^2} \tag{22}$$

Известно [7], что интеграл по замкнутому контуру типа (19) определяется через сумму вычетов C_{-1}

$$\oint f(\zeta)\exp(ix_q\zeta)\mathbf{d}\zeta = 2\pi i\zeta C_{-1}\,,$$

где $f(\zeta)$ – сомножитель при экспоненте в (19).

Рассмотрим комплексный интеграл (19) по контуру полукольца с радиусом R в верхней полуплоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Согласно (22), полюс ζ^+, т.е. особая точка при плюсовом знаке перед i, находится в этой полуплоскости. Представим интеграл (19) как две составляющие: по верхней полуокружности C_R и по горизонтальному диаметру:

$$\oint = \int_{C_R} + \int_{-R}^{R} = 2\pi i C_{-1}\left(\zeta^+\right). \tag{23}$$

В правой части записано его значение через вычет в точке ζ^+, которая определяется выражением (22) при знаке «+».

Согласно леммы Жордана [7] , интеграл по полуокружности с бесконечным радиусом: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\dfrac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\exp ix_q\zeta\mathbf{d}\zeta$ равен нулю, если $x_q > 0$ и предел $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}$ является конечной величиной. Именно этот случай здесь имеет место.

Если же, $x_q = x - x' < 0$, то условия леммы Жордана будут выполняться в нижней полуплоскости и тогда, для вычисления интеграла (19), целесообразно разделить его на две части с контурами интегрирования по нижней полуокружности $-C_R$ и по горизонтальному диаметру:

$$\oint = \int_{-C_R} - \int_{-R}^{R} = 2\pi i C_{-1}\left(\zeta^-\right). \tag{24}$$

Для интеграла по нижней окружности также применима лемма Жордана. Поэтому, интегралы, как по верхней полуокружности в (23), так и по нижней в (24) , равны нулю, а интегралы по горизонтальному диаметру в пределе переходят в интеграл (16):

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{r}\frac{e_1^2\zeta - b}{e_1^2\zeta^2 - 2b\zeta + a^2}\exp ix_q\zeta\cdot\mathbf{d}\zeta = I_1\,.$$

Отсюда, в соответствии с (23) и (24), значение интеграла (16) будет равно при $x - x' > 0$, $I_1 = 2\pi\, iC_{-1}(\zeta^+)$, а при $x - x' < 0$ равняется $I_1 = -2\pi\, iC_{-1}(\zeta^-)$.

Найдем вычет для полюса в верхней полуплоскости:

$$C_{-1}\left(\zeta^+\right) = \lim_{\zeta\to\zeta^+} f\left(\zeta\right)\exp\left(i\,x_q\zeta\right)\left(\zeta - \zeta^+\right).$$

После подстановки $f(\zeta)$, согласно (19), получаем величину вычета:

$$C_{-1}\left(\zeta^{+}\right)=\lim_{\xi\to\xi^{+}}\frac{\left(e_1^2\zeta-b\right)\exp\left(i\,x_q\zeta\right)\left(\zeta-\zeta^{+}\right)}{\left(1-\beta_x^2\right)\left(\zeta-\zeta^{+}\right)\left(\zeta-\zeta^{-}\right)}=\frac{\left(e_1^2\zeta^{+}-b\right)\exp\left(i\,x_q\zeta^{+}\right)}{2i\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}.$$

Подставляя в последнее выражение значения e_1 и b, можно записать вычет в виде:

$$C_{-1}\left(\zeta^{+}\right)=\left(1/2\right)\exp\left[\frac{x_q\beta_x\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)}{1-\beta_x^2}-\frac{ix_q\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right].\quad(25)$$

Аналогично определяется вычет для полюса в нижней полуплоскости:

$$C_{-1}\left(\zeta^{-}\right)=\left(1/2\right)\exp\left[\frac{x_q\beta_x\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)}{1-\beta_x^2}+\frac{ix_q\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right].\quad(26)$$

После подстановки значений вычетов в выражении для интеграла I_1, находим:

при $x > x'$

$$I_1=\pi i\exp i\left(x-x'\right)\frac{\beta_x\beta_y k_2+\beta_x\beta_z k_3}{1-\beta_x^2}\exp\left[-\left(x-x'\right)\frac{\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right],$$

при $x < x'$

$$I_1=-\pi i\exp i\left(x-x'\right)\frac{\beta_x\beta_y k_2+\beta_x\beta_z k_3}{1-\beta_x^2}\exp\left[\left(x-x'\right)\frac{\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right].$$

Общее, для обоих случаев, выражение для интеграла можно записать в виде

$$I_1=\pi i\frac{x-x'}{\left|x-x'\right|}\exp\left[i\left(x-x'\right)\frac{\beta_x\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)}{1-\beta_x^2}-\left|x-x'\right|\frac{\sqrt{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}}{1-\beta_x^2}\right].$$

После подстановки I_1 в (15), выражение для силы примет вид:

$$F_x=\frac{q_1q_2\left(x-x'\right)}{2\pi\varepsilon\left|x-x'\right|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(y-y'+\frac{x-x'}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_y\right)k_2+\right.$$
$$\left.+\left(z-z'+\frac{x-x'}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_z\right)k_3\right]-\frac{\left|x-x'\right|}{1-\beta_x^2}\times\quad(27)$$
$$\left.\times\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}\sqrt{\frac{\left(k_2^2+k_3^2\right)\left(1-\beta_x^2\right)-\left(\beta_y k_2+\beta_z k_3\right)^2}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}\right]\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3.$$

Введем новые обозначения:

$$L_2=y-y'+\frac{x-x'}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_y,\quad(28)$$

$$L_3=z-z'+\frac{x-x'}{1-\beta_x^2}\beta_x\beta_z,\quad(29)$$

$$A_g = \frac{\beta_y^2 \beta_z^2}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}, \tag{30}$$

$$A_i = \sqrt{\frac{1-\beta_x^2-\beta_z^2-\beta_y^2\beta_z^2\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^{-1}}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}, \tag{31}$$

$$A_\pm = A_g \pm A_i i, \tag{32}$$

$$u = \frac{|x-x'|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2} > 0 \tag{33}$$

и заменим переменные

$$s^2 = \left(k_2 - k_3 A_+\right)\left(k_2 - k_3 A_-\right) > 0, \tag{34}$$

$$n = k_2 L_2 + k_3 L_3 . \tag{35}$$

Так как при изменении k_2 и k_3 в одной из полуплоскостей, например $0<k_2<\infty$, $-\infty<k_3<\infty$, новые переменные s и n принимают все возможные вещественные значения, например, если $0<s<\infty$, $-\infty<n<\infty$, тогда полученное при интегрировании по n и s значение интеграла необходимо удвоить.

Подстановка новых обозначений (28)–(35) в (27) приводит к следующему выражению для силы:

$$F_x = \frac{q_1 q_2 (x-x')}{2\pi\varepsilon|x-x'|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{ i\left(L_2 k_2 + L_3 k_3\right) - us\right\} \mathbf{d}k_2 \mathbf{d}k_3 . \tag{36}$$

Определим элемент площади в новых переменных n и s. Так как

$$\mathbf{d}s\mathbf{d}n = \left(\frac{\partial s}{\partial k_2}\frac{\partial n}{\partial k_3} - \frac{\partial s}{\partial k_3}\frac{\partial n}{\partial k_2}\right)\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3,$$

то с учетом (34) – (35) получаем

$$\mathbf{d}s\mathbf{d}n = \frac{\mathbf{d}k_2\mathbf{d}k_3}{s}\left[k_2\left(L_3 + L_2 A_g\right) - k_3\left(L_3 A_g + L_2 A^2\right)\right], \tag{37}$$

где

$$A^2 = \frac{\beta^2{}_y \beta_z^2}{\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^2} + \frac{1-\beta_x^2-\beta_z^2-\dfrac{\beta^2{}_y\beta^2{}_z}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}{1-\beta_x^2-\beta_y^2}. \tag{38}$$

Найдем выражения для k_2 и k_3 , как функции параметров s и n. С учетом (34) и (35), будем иметь

$$k_2 = \frac{n}{L_2} - k_3\frac{L_3}{L_2}, \tag{39}$$

$$s^2 = k_2^2 - 2k_2 k_3 A_g + k_3^2 A^2 .$$

А после подстановки k_2 в последнее выражение, получаем квадратное уравнение для k_3

$$k_3^2\left(\frac{L_3^2}{L_2^2} + 2A_g\frac{L_3}{L_2} + A^2\right) - 2k_3 n\left(\frac{L_3}{L_2^2} + \frac{A_g}{L_2}\right) + \frac{n^2}{L_2^2} - s^2 = 0 .$$

Решение этого квадратного уравнения, очевидно, равно

$$k_3 = \frac{n\left(L_3 + L_2 A_g\right) \pm L_2 \sqrt{s^2 B^2 - n^2 A_i^2}}{B^2}, \tag{40}$$

где

$$B^2 = L_3^2 + 2A_g L_3 L_2 + A^2 L_2^2. \tag{41}$$

После подстановки k_3 в (39), определим параметр

$$k_2 = \frac{n\left(L_3 A_g + L_2 A^2\right) \mp L_3 \sqrt{s^2 B^2 - n^2 A_i^2}}{B^2}. \tag{42}$$

Замена величин k_2 и k_3 в (37) соответствующими аналитическими формулами дает окончательное выражение для элемента площади в новых переменных:

$$\mathbf{d}k_2 \mathbf{d}k_3 = \mp \frac{s}{\sqrt{s^2 B^2 - n^2 A_i^2}} \mathbf{d}s\mathbf{d}n. \tag{43}$$

Двойные знаки, как уже было отмечено, свидетельствуют о двойственности значений k_2 и k_3 при одних и тех же значениях n и s. Из выражений (40) и (42) видно, что k_2 и k_3 будут действительны, если $s^2 B^2 - n^2 A_i^2 \geq 0$, и тогда $|n| \leq sBA_i^{-1}$.

После подстановки элемента площади (43) в (36) и умножения на 2 сила запишется в виде:

$$F_x = \frac{q_1\left(x - x'\right)}{\pi\varepsilon|x - x'|} \int_0^\infty \mathbf{d}s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \exp\left(in - us\right)}{\sqrt{s^2 B^2 - n^2 A_i^2}} \mathbf{d}n. \tag{44}$$

Осуществим теперь переход к полярным координатам r, α в плоскости ns,

$$n = r \cdot \sin\alpha, \qquad s = r \cdot \cos\alpha, \tag{45}$$

для которых элемент площади и диапазон изменения будут следующими:

$$\mathbf{d}n\mathbf{d}s = r\mathbf{d}r\mathbf{d}\alpha, \qquad 0 < r < \infty, \qquad -\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_0,$$

где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{B}{A_i}. \tag{46}$$

Тогда выражение (44) в полярных координатах принимает вид

$$F_x = \frac{q_1 q_2\left(x - x'\right)}{\pi\varepsilon|x - x'|} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \exp\left(i \sin\alpha - u\cos\alpha\right) r}{\sqrt{B^2 \cos^2\alpha - A_i^2 \sin^2\alpha}} \mathbf{d}\alpha\mathbf{d}r,$$

и после интегрирования по переменной r, получаем

$$F_x = \frac{q_1 q_2\left(x - x'\right)}{\pi\varepsilon|x - x'|} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{B^2 \cos^2\alpha - A_i^2 \sin^2\alpha}} \frac{\mathbf{d}\alpha}{\left(i\sin\alpha - u\cos\alpha\right)^2}. \tag{47}$$

Выделим из (47) вещественную часть и после некоторых преобразований получим, что

$$F_x = \frac{2q_1 q_2\left(x - x'\right)}{\pi\varepsilon|x - x'|} \int_0^{B/A_1} \frac{(u^2 - \operatorname{tg}^2\alpha)\mathbf{d}\operatorname{tg}\alpha}{\left(u^2 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)^2 \sqrt{B^2 - A_i^2 \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Перейдем к новым параметрам, a_1 и b_1, по формулам:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A_i}\sin\gamma, \qquad a_1 = u^2, \qquad b_1 = \frac{B^2}{A_i^2} > 0. \tag{48}$$

После очевидных операций получаем, что

$$F_x = \frac{2q_1 q_2\left(x - x'\right)}{\pi\varepsilon|x - x'|A_i} \int_0^{\pi/2} \frac{a_1 - b_1 \sin^2\gamma}{\left(a_1 + b_1 \sin^2\gamma\right)^2} \mathbf{d}\gamma. \tag{49}$$

Входящий в (49) интеграл можно записать в виде разности двух интегралов:

$$I_2=\int_0^{\pi/2}\frac{a_1-b_1\sin^2\gamma}{\left(a_1+b_1\sin^2\gamma\right)^2}\mathbf{d}\gamma=2a\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{\left(a_1+b_1\sin^2\gamma\right)^2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{a_1+b_1\sin^2\gamma}, \tag{50}$$

выражения для которых даны в [8].
Запишем значение второго интеграла в виде

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{a_1+b_1\sin^2\gamma}\mathbf{d}\gamma=\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a_1+b_1}{a_1}}\operatorname{tg}\gamma\right)}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_1b_1}}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a_1^{\,2}+a_1b_1}}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{\left(a_1+b_1\sin^2\gamma\right)^2}=\frac{1}{2a_1\left(a_1+b_1\right)}\left[\left(2a_1+b_1\right)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathbf{d}\gamma}{a_1+b_1\sin^2\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{b_1\sin\gamma\cos\gamma}{a_1+b_1\sin^2\gamma}\Bigg|_0^{\pi/2}\right]=\frac{2a_1+b_1}{2a_1\left(a_1+b_1\right)}\frac{\pi}{2\sqrt{a_1^{\,2}+a_1b_1}}.$$

Подставляя значения интегралов в (50) находим интеграл I_2 и после подстановки его в (49) силу можно записать в виде:

$$F_x=\frac{q_1q_2\left(x-x'\right)}{\varepsilon\left|x-x'\right|}\frac{\sqrt{a_1}}{A_i\left(a_1+b_1\right)^{3/2}}. \tag{51}$$

В соответствии с (48) определим параметры a_1 и b_1:

$$\sqrt{a_1}=u=\frac{\left|x-\upsilon_xt\right|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2},$$

$$b_1=\frac{B^2}{A_i^2}=\frac{\left(L_3^2+2A_gL_3L_2+A^2L_2^2\right)\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^2}{(1-\beta_x^2)\,(1-\beta^2)},$$

$$a_1+b_1=\frac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{(1-\beta_x^2-\beta_z^2)\,(1-\beta_x^2-\beta_y^2)-\beta_y^2\beta_z^2}\times$$

$$\times\Big\{\left(1-\beta_x^2-\beta_z^2\right)\left(x-\upsilon_xt\right)^2+\left(1-\beta_x^2-\beta_z^2\right)\left(y-\upsilon_yt\right)^2+$$

$$+\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)\left(z-\upsilon_zt\right)^2+2\beta_x\beta_y\left(x-\upsilon_xt\right)\left(y-\upsilon_yt\right)+$$

$$+2\beta_x\beta_z\left(x-\upsilon_xt\right)\left(z-\upsilon_zt\right)+2\beta_y\beta_z\left(y-\upsilon_yt\right)\left(z-\upsilon_zt\right)\Big\}.$$

А это, как нетрудно проверить в обратном порядке, равняется

$$a_1+b_1=\frac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\left\{\left(\vec r-\vec\upsilon t\right)^2-\left[\vec\beta\times\left(\vec r-\vec\upsilon t\right)\right]^2\right\}.$$

После подстановки A_i , a_1 и b_1 в (51) получаем:

$$F_x=\frac{q_1q_2\left(x-x'\right)\dfrac{\left|x-x'\right|}{1-\beta_x^2}\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2}}{\varepsilon\left|x-x'\right|\left[\dfrac{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta_x^2-\beta_y^2\right)^2}\right]^{1/2}\left\{\left[\dfrac{1-\beta_x^2-\beta_y^2}{\left(1-\beta_x^2\right)\left(1-\beta^2\right)}\right]^{3/2}\left\{\left(\vec r-\vec r_q\right)^2-\left[\vec\beta\times\left(\vec r-\vec r_q\right)\right]^2\right\}^{3/2}\right\}}.$$

Это выражение после упрощений принимает вид

$$F_x = \frac{q_1 q_2 (x - x')(1-\beta^2)}{\varepsilon \left\{ (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - \left[\vec{\beta} \times (\vec{r} - \vec{r}_q) \right]^2 \right\}^{3/2}}. \quad (52)$$

6. Сила воздействия движущегося заряда на неподвижный заряд

Нетрудно убедиться, что аналогичными являются решения уравнений (6) для составляющих сил F_y и F_z. Поэтому силу воздействия движущегося заряда q_1 со скоростью $\vec{v}$ на неподвижный заряд q_2 можно записать в векторном виде с помощью соотношения:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r} - \vec{r}_q)(1-\beta^2)}{\varepsilon \left\{ (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - \left[\vec{\beta} \times (\vec{r} - \vec{r}_q) \right]^2 \right\}^{3/2}}. \quad (53)$$

Если $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q$ – вектор расстояния от заряда q_1 до заряда q_2 (см. рис. 1), то движущийся со скоростью $\vec{v}$ относительно него заряд q_1 в соответствии с (53) действует силой

$$\vec{F} = \frac{q_2 q_1 (1-\beta^2)\vec{R}}{\varepsilon \left\{ R^2 - \left[\vec{\beta} \times \vec{R} \right]^2 \right\}^{3/2}} \quad (54)$$

на заряд q_2. Сила Кулона (IV) при взаимодействии неподвижных относительно друг друга зарядов зависит только от расстояния между ними. Как видим из (54), сила взаимодействия между движущимися заряженными телами зависит от их относительных параметров: расстояния между ними, их относительной скорости и углового положения между расстоянием и скоростью. Взаимодействие двух тел не зависит от координатных систем, систем отсчета, эфира, поля. Этот результат свидетельствует о том, что отсутствуют среды типа эфира или поля, относительно которых происходит движение. Если бы они были, то взаимодействие зависело бы от скорости относительно этих гипотетических сущностей. Выражение (54) также свидетельствует, что наиболее просто рассматривать взаимодействия двух тел можно с помощью их относительного расстояния и скорости, а не в разных системах отсчета, как это принято в теории относительности.

С помощью выражения (54) в работах [4, 9-11] решены различные задачи электромагнитного взаимодействия тел и их движений.

Литература

1. Smulsky J.J. A New Approach to Electrodynamics and to the Theory of Gravitation // What physics for the next century? Prospects for renewal, open problems, "heretical truths"/ Proceeding of the International Conference. Ischia, Italy. - 1991. - p. 336 - 344.
2. Smulsky I.I. The New Approach and Superluminal Particle Production // Physics Essays.- 1994.-Vol. 7.-No. 2.-P. 153-166.
3. Смульский И.И. Электромагнитное и гравитационное воздействия (нерелятевистские трактаты).- Новосибирск: Наука. -1994.-225с.
4. Смульский И. И. Теория взаимодействия. - Новосибирск: Из-во Новосибирского ун-та, ННЦ ОИГГМ СО РАН. - 1999. - 294с.
5. Smulsky J.J. Conceptual Error in Contemporary Science // Proceedings of the Natural Philosophy Alliance. 13th Annual Conference 3-7 April 2006 at the University of Tulsa, OK, USA. Vol.3, No. 2. Published Space Time Analyses, Ltd. Arlington, MA, USA.– 2007. – Pp. 277-281.
6. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля.– М.: ГТТИ, 1949.
7. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М.: Физматгиз, 1968.– 720 с.

8. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.,– М.: Физматгиз, 1962.
9. Смульский И.И. Траектории при взаимодействии двух тел, зависящем от относительных расстояния и скорости // Мат. моделирование.– 1995.– Т.7.– N.7.– С. 111-125.
10. Smulsky J.J. The new Fundamental Trajectories: part 1 – Hyperbolic/ Elliptic trajectories// Galilcan Electrodynamics. Vol. 13, № 2, 2002, pp. 23-28.
11. Smulsky J.J. The new Fundamental Trajectories: part 2 - Parabolic/ Elliptic trajectories// Galilcan Electrodynamics. Vol. 13, № 3, 2002, pp. 47-51.